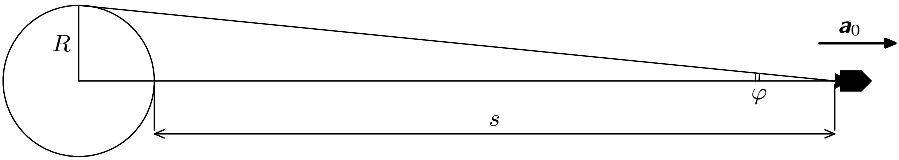
22. ročník, úloha II . 4 ... *do nekonečna a ještě dál* *(4 body; průměr 1,89; řešilo 19 studentů)*

Bohatý vesmírný turista si zaplatil výlet do hlubokého vesmíru. Raketa vyletí ze Země a rovnoměrně zrychluje se zrychlením a, což si turista může ověřit například pouštěním míčku. Nudnou cestu si krátí zíráním ze zadního okénka, pozorováním Země. Po nějaké době (Jaké? Aspoň řádový odhad.) se mu začne zdát, že něco není v pořádku – Země se pomalu přestává zmenšovat. Z toho usoudí, že raketa zpomaluje, což neodpovídá tomu, že posádka stále cítí zrychlení a. To ale turistu nenapadne a rozlobeně jde za kapitánem požadovat vysvětlení. Co mu kapitán řekne?

Předpokládáme, že turista vidí celé elektromagnetické spektrum a má železné nervy a pozorování vydrží. *O prázdninách zkoušel Marek Pechal.*

To, že se zmenšování vzdáleného objektu zdá pomalejší a pomalejší, má dvě příčiny. Uvažujeme-li klasickou fyziku, bude změna zmenšování kotoučku Země dána prostou geometrií. Navíc ale nesmíme zapomenout na to, že raketa nemůže zrychlovat neomezeně a existuje horní hranice rychlosti, rychlost světla.

V základním případě hledáme vztah pro velikost úhlu, ve kterém vidíme vzdalující se Zemi se zrychlením a_0. Protože loď bude od Země velmi daleko, použijeme aproximaci $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$.



Obr. 1. Vzdalující se loď

Na obrázku 1 vidíme situaci letící lodi ve vzdálenosti s od povrchu Země. Pro velikost φ pak jasně platí

$$\varphi = \frac{2R}{R + \frac{1}{2}a_0 t^2}\,, \tag{1}$$

z čehož vyplývá, že změna zmenšení není lineární.

Nicméně toto přece každý vesmírný turista ví. To, co jej zarazilo, bylo, že v čase asi c/a_0 se jím pozorovaná závislost velikosti Země na čase začala podstatně odchylovat od předpovězené funkce (1).

Časový odhad dostaneme jednoduchou úvahou – kdybychom neznali speciální teorii relativity, byla by to doba, za kterou raketa dosáhne rychlosti světla.

Jak vyjádříme velikost rychlosti v relativitě? Ze zadání víme, že posádka rakety cítí stále stejné zrychlení a. Zaveďme nejdřív novou veličinu, tzv. rapiditu, jako

$$r = c \operatorname{argtgh} \frac{v}{c}\,.$$

která má tu správnou vlastnost, že je lineární vzhledem k Lorentzově transformaci[1]. To znamená, že známe-li rapiditu systému $\mathcal{A}$ vůči systému $\mathcal{B}$ a rapiditu systému $\mathcal{B}$ vůči systému $\mathcal{C}$, je rapidita $\mathcal{A}$ vzhledem k $\mathcal{C}$ pouhým součtem předchozích dvou. Co to pro nás znamená? Řekněme si, že letící raketa je v určitém okamžiku inerciální soustavou s rychlostí v (tedy k Zemi má

[1]) Více např. na Wikipedii, `http://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity`.

rapiditu r). V dalším okamžiku je to soustava s rychlostí v_1 a rapiditou $r + \mathrm{d}r$ vůči předchozí soustavě. A tak bychom mohli pokračovat dál a dál a vždy přičteme stejnou hodnotu $\mathrm{d}r$, tedy celková rapidita vůči Zemi roste lineárně s časem. Konstantu úměrnosti označme α. Tedy

$$\alpha t = c \operatorname{argtgh} \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = c \operatorname{tgh} \frac{\alpha t}{c} .$$

Z toho už jednoduše vypočítáme závislost vzdálenosti na čase ($v = \mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t$), která vyjde

$$s = \frac{c^2}{\alpha} \log \cosh \frac{\alpha t}{c} .$$

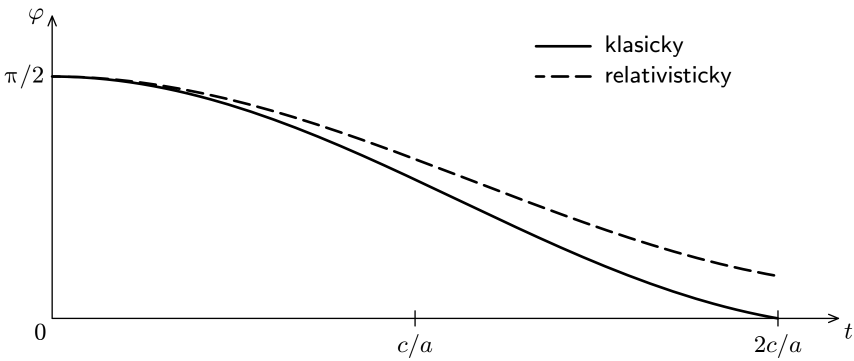
A stejně vypočítáme skutečné zrychlení ($a = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$).

$$a = \frac{\alpha}{\cosh^2 \dfrac{\alpha t}{c}} .$$

Vidíme, že pokud $c \to \infty$, jmenovatel bude roven 1 a tedy $\alpha = a_0$. Pokud provedeme stejnou limitu se vztahy pro s a v, dostaneme klasické rovnice (můžete si sami ověřit třeba použitím Taylorova rozvoje hyperbolických funkcí).

Tedy hledaná závislost velikosti zorného úhlu na čase bude v relativistickém případě

$$\varphi = \frac{Ra}{Ra + c^2 \log \cosh \dfrac{at}{c}} .$$



Obr. 2. Graf závislosti velikosti zorného úhlu počítané různými metodami

Na obrázku 2 vidíme srovnání klasické a relativistické závislosti. Je vidět, že k jejich odchýlení dojde už dříve než v čase c/a, nicméně jako odhad je tato hodnota postačující.

Tedy co odpoví kapitán lodi? Nejdřív prezentuje klasickou závislost. Turista si ale pravděpodobně dál bude stěžovat na to, že to nefunguje přesně. V tu chvíli se vytasí s relativistickým odvozením a vytře mu zrak.

Nicméně, turista by musel mít opravdu dobré oči. Už docela brzo by se mu Země ztratila z dohledu, protože člověk nerozliší objekty menší než $1''$. A i kdyby si vezl dalekohled, dříve nebo později by se světlo od Země odražené ztratilo v infračervené části spektra kvůli rudému posuvu.

Ve vašich řešeních jste buď rovnou řešili relativistický případ (což bylo více bodováno i v případě, že jste se zamotali) a správně určili dobu, za kterou jev bude patrný (a byli i tací, kteří nezapomněli na Dopplerův posun, za což jim patří pochvala), nebo jste rozebrali klasickou limitu.

U relativistů bylo největším problémem špatné určení příčiny jevu – kontrakce délek se vztahuje na měření v pohybující se soustavě vzhledem k statické, nikoliv na jejich vzdálenost; klasikové většinou problémy neměli.

Aleš Podolník
ales@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.