

Milí řešitelé!

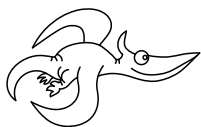
I v novém kalendářním roce jsme pro vás připravili autorská řešení úloh druhé série, která právě dostáváte do rukou společně se svými opravenými úlohami. Na konci brožurky se pak můžete potěšit pohledem na aktualizovanou výsledkovou listinu.

Na pátek 13. února pro vás chystáme již třetí ročník *FYKOSiho fyziklání* a budeme velmi potěšeni, zúčastníte-li se jej i vy se svými spolužáky či lépe spolužačkami. Podrobnější informace, pravidla soutěže a zpravodaj z loňského ročníku najdete na našich webových stránkách.

Příznivce akce *Jeden den s fyzikou* zveme na Karlov ve čtvrtek 5. února 2009. Detailní informace včetně programu najdete na adrese <http://www.mff.cuni.cz/verejnost/jdf/>.

Také bychom vás touto cestou chtěli upozornit na novinku na našich internetových stránkách. Po registraci (vyžadujeme adresu pro posílání řešení, školu, rok maturity a e-mail) máte přístup do nové *uživatelské sekce*. Zde můžete nejen uploadovat svá řešení, ale také upravovat své příspěvky v diskusním fóru a nastavit si notifikace o nově přidaných. Rovněž můžete sledovat, kteří uživatelé jsou právě online. Kromě toho ze svého uživatelského účtu máte nejjednodušší způsob přihlášení na DSEF a Fyziklání.

Vaši organizátoři



Zadání IV. série



Termín odeslání: 23. února 2009

Úloha IV.1 ... *Kyklopovo zrcadlo*

Zkuste vypočítat, jaký tvar by mělo mít zrcadlo, tak, aby se v něm kyklopova hlava jevila jako čtverec. Kyklop má hlavu ve tvaru koule s okem uprostřed.

Úloha IV.2 ... *na tenkém ledě*

Je známo, že led vystavený většímu tlaku snižuje svou teplotu tání. Funguje tento jev při bruslení (tedy, je tlak brusle dostatečný, aby se led rozpustil i při nízkých teplotách)? Pokud ne, co jiného zaručuje hladký skluz?

Úloha IV.3 ... *vlček neboli káča*

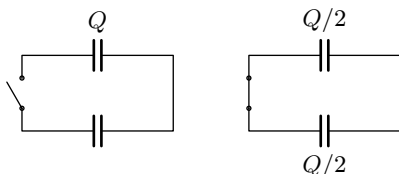
Inženýři v NASA chtějí využít setrvačnicků jako úložiště energie pro družice. Poradte jim, jakou maximální energii mohou uložit do rotujícího válce o poloměru r . Na jakou maximální úhlovou rychlost ω lze roztočit setrvačník, než praskne?

Úloha IV.4 ... *šachovnice*

Jistě znáte pohádku o chytrákově, který si udělal legraci z krále tím, že mu dal za úkol na políčka šachovnice vyskládat postupně 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{63} zrníček rýže po řádcích zleva doprava). Většinou se ale nedodává, že se chytrák velmi podivil, když král šachovnicový stolek nechal přinést. Spočtete, kde byl vypodložen, aby zrníčka nespadla. Zrníčka jsou hmotné body umístěné ve středu polí. (Přesněji řečeno nás zajímá poloha těžiště šachovnice s rýží.)

Úloha IV . P ... zachraňte fyziku

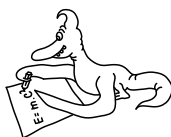
Rozpojený obvod na obrázku 1 obsahuje jeden nenabitý a jeden nabitý kondenzátor (náboj Q). Vodiče jsou ideální, nemají žádný odpor, oba kondenzátory jsou stejné. Celková energie nábojů v obvodu tedy je $Q^2/2C$. Pokud se po sepnutí vypínače náboje na kondenzátorech vyrovnají, celková energie bude $Q^2/8C + Q^2/8C = Q^2/4C$, což je polovina oproti počáteční situaci. Vysvětlete tento rozdíl. Kde se spotřebovala polovina energie? Vypínač je vyrobený tak šikovně, že v něm vysvětlení netkví.



Obr. 1. Obvod s kondenzátory před a po sepnutí vypínače

Úloha IV . E ... blowjob

Kupte si nafukovací balonek, nafoukněte jej, zavažte a proměřte, jak se jeho objem mění s časem. Pokuste se určit, kolik z plochy balonku zabírají póry, kterými vzduch uniká.

**Řešení II. série****Úloha II. 1 ... duhová energie (3 body; průměr 2,04; řešilo 26 studentů)**

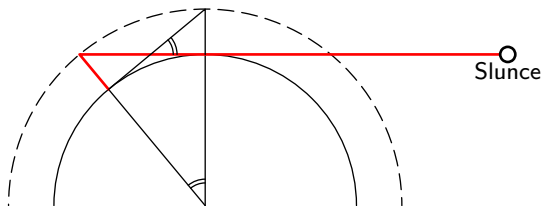
Zkuste se zamyslet a posléze vypočítat, kde a kdy na Zemi nelze vidět duhu?

Na schůzce vypořel Aleš.

Duha vzniká rozkladem a odrazem světla v kapce, paprsek vychází (při jednom odrazu) pod úhlem 42° .

Budeme-li se zabývat pouze primární duhou, potom Slunce nesmí být výše než 42° nad obzorem, protože jinak by paprsky mířily zpátky do vesmíru.

Abychom zodpověděli, jak hluboko může být Slunce pod obzorem, musíme zjistit, jak tlustá je atmosféra, resp. jak vysoko je vrstva, v které se kapky, v nichž duha vzniká, vyskytují. Mraky se vyskytují (na rovníku) do výšky 18 km, což je 0,3 % poloměru Země. Z toho vypočteme (podobnost trojúhelníku, viz. obrázek), že Slunce může být nejvýše $4,32^\circ$ pod obzorem.



Obr. 2. Krajní případ pro Slunce pod obzorem

Také musí být v příslušném místě oblohy nějaké kapičky vody, ve kterých by se mohly paprsky odrážet (kapičky ale nemusí dopadat až na zem ani nemusí přšet v místech, kde stojíme my.

Dále by slunečnímu paprsku neměla stát v cestě žádná překážka nebo by měl být paprsek natolik koncentrován, aby bylo lidské oko schopno ten rozdíl zaznamenat.

Situace se samozřejmě změní, pokud se budeme zabývat vícenásobnými odrazy, kulovými duhami, které vznikají naopak pokud je slunce dostatečně vysoko, a dalšími specialitami.

Jan Jelínek

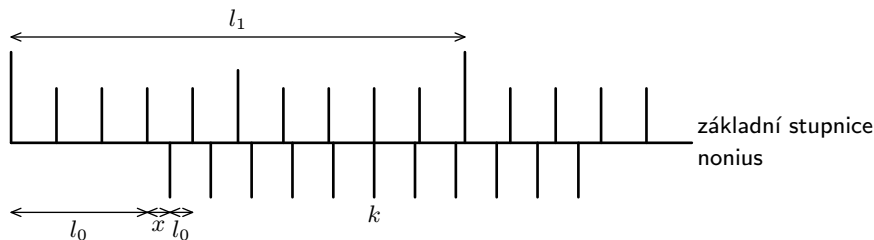
jjan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... odhalte tajemství „šuplery“ (3 body; průměr 2,71; řešilo 31 studentů)

Vysvětlete nám, jak funguje „šuplera“, že dokáže měřit desetiny milimetru.

Nad tajemstvím života se zamyslel Marek Scholz.

Pro některé bylo prvním úkolem (ale nezamýšleným) zjistit, co to je šuplera. Toto slovo vzniklo zkomolením německého Schub – postrčení, zasunutí, šoupnutí. A neříká se tak ničemu jinému než posuvnému měřítku.



Obr. 3. Schéma šuplery

Šuplera se skládá ze dvou navzájem posuvných částí se stupnicemi. Základní stupnice je dělena tak, jak jsme zvyklí na centimetry a milimetry. Pomocí ní odečítáme rozměry měřeného tělesa s přesností na celé milimetry. Dále je na šupleře posuvná část s druhou stupnicí – tzv. nonius. Jeho dílky ovšem nejsou široké milimetr, ale o něco užší. A v tomto je právě skrytý celý trik. Představme si, že měříme vzorek o jisté tloušťce l . Na základní stupnici odečteme tloušťku vzorku v celých milimetrech l_0 . Do celkové tloušťky nám ještě chybí desetinná část, kterou označíme x . Mějme dílky nonia v rozestupech d a ať se k -tý dílek nonia kryje s celým milimetrem základní stupnice ve vzdálenosti l_1 od počátku. Je jasné, že vzdálenost l_1 se dostane jako součet tloušťky vzorku a délky na noniu.

$$l_1 = l_0 + x + kd.$$

Víme, že l_1 a stejně tak l_0 jsou v celých milimetrech, z toho vyplývá, že i jejich rozdíl $x + kd$ je nutně v celých milimetrech. Vzdálenost d je pro posuvné měřítko obvykle 0,9 mm. Abychom splnili, že součet $x + 0,9k$ je nejbližší možný celý milimetr, musí být $x = 0,1k$ mm. Jinými slovy dílky nonia přímo odměřují vzdálenost v desetínách milimetru.

Posuvná měřítka se vyrábějí i s rozestupy dílků nonia po 0,95 mm a vzácně i po 0,98 mm. Taková posuvná měřítka pak měří s přesností na dvacetinu popřípadě padesátinu milimetru. Pro zachování pohodlnosti odčítání desetinné části měřené vzdálenosti se pak odpovídajícím

způsobem musí upravit škálování nonia. Desetině milimetru odpovídají dva, respektive pět dílků stupnice nonia.

Úloha byla velmi jednoduchá a většina řešitelů odhalila skutečnou podstatu fungování šuplery. Přesto nám přišlo několik řešení, ve kterých bylo jen popsáno, jak se s posuvným měřidlem pracuje bez vysvětlení jeho zázračné přesnosti.

Martin Formánek

`martin@fykos.mff.cuni.cz`

Úloha II.3 ... ledvinové koule (4 body; průměr 1,78; řešilo 18 studentů)

Malá koule stojí v klidu na velké kouli, která volně leží na podložce. Do malé koule nepatrně strčíme a ta se svalí na zem. Jak daleko od původního bodu dotyku velké koule se zemí malá koule dopadne?
Na teoretické mechanice zkoulel Lukáš Ledvina.

Budeme předpokládat, že koule po sobě i po podložce kloužou bez tření, a tedy se nekutálí¹. Protože všechny vnější síly (tíhová a reakční síla podložky) působí pouze ve svislém směru, splňuje tento systém zákon zachování hybnosti ve vodorovném směru², který lze po dobu, kdy se koule dotýkají, formulovat jako

$$Mv + m(v + (r + R)\omega \cos \varphi) = \text{konst},$$

kde rychlost spodní koule (orientovanou doprava) jsme označili v a úhlovou rychlost oběhu horní okolo spodní ω . Dosadíme počáteční podmínky (na začátku byly všechny rychlosti nulové) a zjistíme, že konstanta je rovná nule. Tedy

$$v = -\frac{m}{m + M}(r + R)\omega \cos \varphi. \quad (1)$$

Dále se jistě zachovává celková mechanická energie. Dokud se koule dotýkají, je celková potenciální energie rovna

$$V = mg(r + R) \cos \varphi$$

a kinetická

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m((v + (r + R)\omega \cos \varphi)^2 + ((r + R)\omega \sin \varphi)^2).$$

Velikost zachovávající se energie určíme opět z počátečních podmínek jako $mg(r + R)$. Proto

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + m(r + R)v\omega \cos \varphi + \frac{1}{2}m(r + R)^2\omega^2 + mg(r + R) \cos \varphi - mg(r + R) = 0. \quad (2)$$

Soustavou diferenciálních rovnic (1) a (2) je kompletně popsán vývoj systému až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí. My ji naštěstí nemusíme vyřešit, protože nám stačí zjistit úhel φ_0 v tomto okamžiku. Mohli bychom obě rovnice zderivovat v čase, vyřešit vzniklou soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, $\dot{\omega}$, $\ddot{\omega}$, z nichž bychom ale $\ddot{\omega}$ položili rovnou nule (viz dále)³. To se nám ovšem nechce, a tak se místo toho trochu zamyslíme.

¹) Takový systém má i svůj název. Až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí, se mu říká *eliptické kyvadlo* (tušíte správně, trajektorie horní koule bude částí elipsy).

²) To by nebyla pravda, kdyby se spodní koule po podložce namísto klouzání kutálela, protože reakční síla podložky by jakožto vnější síla působila na systém i ve vodorovném směru, což si většina z vás, kdo jste uvažovali tření, neuvědomila.

³) Všimněme si, že máme štěstí, protože v rovnicích nevystupuje přímo x (což vyjadřuje translační symetrii systému ve vodorovném směru).

Na horní kouli působí tíhová síla (směrem dolů) a reakce spodní koule, která tíhovou doplní vždy takovým způsobem, aby výsledné zrychlení horní koule odpovídalo pohybu po (taktéž zrychlujícím) povrchu spodní koule. Koule se odlepi v okamžiku, kdy reakční síla spodní koule přestává mít směr od spodní koule a měla by začínat mít opačný směr (ale nebude, protože tato vazba má pouze odpuzivý charakter) – to je okamžik, kdy je tato reakční síla nulová. V tuto chvíli již tedy na spodní kouli žádná síla nepůsobí⁴ a zrychlení horní koule (jež je nyní důsledkem pouze tíhové síly) proto musí (aby na spodní nepůsobila) odpovídat kruhovému pohybu okolo spodní, neboli složka tíhového zrychlení ve směru do středu spodní koule musí být rovna $(r + R)\omega_0^2$. Tudíž

$$(r + R)\omega_0^2 = g \cos \varphi_0, \quad (3)$$

kde symbolem ω_0 jsme označili hodnotu ω v okamžiku odlepení.

Teď už zbývá jenom vyřešit soustavu (1), (2), (3) pro φ_0 . Do (1) umocněné na druhou, resp. vynásobené ω dosadíme za ω^2 z (3), abychom konečně dosazením za $v\omega$ a v^2 do (2) sestavili rovnici pro φ_0 , která se po vydělení nenulovým $mg(r + R)/2$ redukuje na jednoduchý tvar

$$-\mu^2 \cos^3 \varphi_0 + 3 \cos \varphi_0 - 2 = 0, \quad (4)$$

kde

$$\mu = \sqrt{\frac{m}{m + M}} < 1.$$

To je redukováná kubická rovnice pro $\cos \varphi_0$, která má na intervalu $[-1; 1]$ právě jedno řešení, ležící vždy v $(0; 1)$, jež má pozoruhodně jednoduchý tvar

$$\cos \varphi_0 = \frac{2}{\mu} \cos \frac{\pi + \arccos \mu}{3}. \quad (5)$$

Je hodné povšimnutí, že úhel odlepení závisí pouze na poměru hmotností koulí a nikoliv na jejich poloměrech nebo tíhovém zrychlení. Dále poznamenejme, že pro velmi velkou hmotnost spodní koule (relativně vůči hmotnosti horní koule, tj. $m/M \rightarrow 0$) se μ^2 blíží k nule, kubický člen vymizí a rovnice se redukuje na lineární rovnici, jejímž řešením je $\cos \varphi_0 = 2/3$, což je výsledek, který někteří z vás správně odvodili.

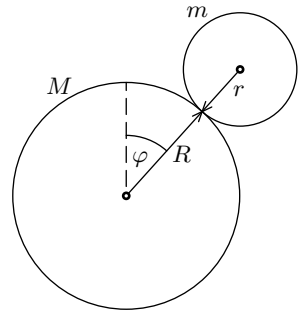
Opomeňme teď případ, kdy je úhel φ_0 tak velký, že koule vlastně dopadla dřív, než se odlepila. Po odlepení se spodní koule bude dále pohybovat stálou rychlostí. Podívejme se na systém v inerciální soustavě, ve které bude stát. Můžeme říci, že po odlepení se koule již zpátky nedotknou. Další pohyb horní koule bude šikmým vrhem z výšky

$$h = R - r + (r + R) \cos \varphi_0 \quad (6)$$

s počáteční rychlostí

$$v_x = \omega_0 (r + R) \cos \varphi_0$$

⁴) Kromě tíhové síly a reakce podložky, které se ale vždy vyruší.



Obr. 4. Poloha koulí a znázornění jednotlivých proměnných

ve vodorovném směru a

$$v_y = \omega_0 (r + R) \sin \varphi_0$$

ve svislém směru s orientací dolů. Pro dobu pádu T tedy bude platit

$$\frac{1}{2}gT^2 + v_y T - h = 0.$$

Jediným nezáporným řešením je

$$T = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}.$$

Než koule dopadne, uletí vodorovnou vzdálenost Tv_x , dopadne tedy se středem ve vodorovné vzdálenosti

$$d = (r + R) \sin \varphi_0 + Tv_x$$

od středu spodní koule. Abychom mohli říct, jak daleko dopadne horní koule od původního bodu dotyku spodní s podložkou, stačí si uvědomit, že po celou dobu byla celková hybnost ve vodorovném směru nulová, vodorovná souřadnice polohy těžiště soustavy tedy zůstala v tomto původním bodě dotyku, a můžeme psát, že hledaná vzdálenost bude

$$x_1 = \frac{Md}{m + M}.$$

Když vše dosadíme (přičemž ω_0 určíme pomocí (3)), vyjde nám po chvíli upravování

$$x_1 = \frac{M}{m + M} (r + R) \left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2} \sqrt{-\gamma^3 + 3\gamma - 2 \frac{r - R}{r + R}} \right),$$

kde $\gamma = \cos \varphi_0$ je vyjádřeno v (5). Zde bychom mohli skončit; všimneme-li si ale, že výraz pod odmocninou se podobá kubické rovnici (4), můžeme se pokusit dosadit z ní za γ a shledáme, že dostaneme výsledek v o něco přehlednějším tvaru

$$x_1 = \frac{M}{m + M} (r + R) \left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2} \sqrt{\frac{4R}{r + R} - \frac{M}{m + M} \gamma^3} \right).$$

Uvedený vztah platí pouze v případě, že se koule vůbec odlepily. Je-li ale horní koule dost velká, aby h ve výrazu (6) vyšlo nekladné, budou se dotýkat i při dopadu. Pro tento případ, tedy pro $\gamma \leq (r - R)/(r + R)$, z Pythagorovy věty odvodíme, že dopadnou ve vzdálenosti

$$d = \sqrt{(r + R)^2 - (r - R)^2} = 2\sqrt{rR}$$

od sebe. Proto pak horní koule dopadne ve vzdálenosti

$$x_1 = \frac{2M}{m + M} \sqrt{rR}$$

od těžiště, a potažmo od původního bodu dotyku spodní koule s podložkou.

Tomáš Tintěra

trosos@fykos.mff.cuni.cz

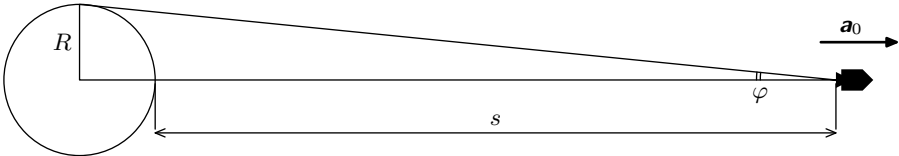
Úloha II.4 ... do nekonečna a ještě dál (4 body; průměr 1,89; řešilo 19 studentů)

Bohatý vesmírný turista si zaplatil výlet do hlubokého vesmíru. Raketa vyletí ze Země a rovnoměrně zrychluje se zrychlením a , což si turista může ověřit například pouštěním míčku. Nudnou cestu si krátí zíráním ze zadního okénka, pozorováním Země. Po nějaké době (Jaké? Aspoň řádový odhad.) se mu začne zdát, že něco není v pořádku – Země se pomalu přestává zmenšovat. Z toho usoudí, že raketa zpomaluje, což neodpovídá tomu, že posádka stále cítí zrychlení a . To ale turistu nenapadne a rozloženě jde za kapitánem požadovat vysvětlení. Co mu kapitán řekne?

Předpokládáme, že turista vidí celé elektromagnetické spektrum a má železné nervy a pozorování vydrží. *O prázdninách zkoušel Marek Pechal.*

To, že se zmenšování vzdáleného objektu zdá pomalejší a pomalejší, má dvě příčiny. Uvažujeme-li klasickou fyziku, bude změna zmenšování kotoučku Země dána prostou geometrií. Navíc ale nesmíme zapomenout na to, že raketa nemůže zrychlovat neomezeně a existuje horní hranice rychlosti, rychlost světla.

V základním případě hledáme vztah pro velikost úhlu, ve kterém vidíme vzdalující se Zemi se zrychlením a_0 . Protože loď bude od Země velmi daleko, použijeme aproximaci $\tan \varphi \approx \varphi$.



Obr. 5. Vzdalující se loď

Na obrázku 5 vidíme situaci letící lodi ve vzdálenosti s od povrchu Země. Pro velikost φ pak jasně platí

$$\varphi = \frac{2R}{R + \frac{1}{2}a_0t^2}, \quad (7)$$

z čehož vyplývá, že změna zmenšení není lineární.

Nicméně toto přece každý vesmírný turista ví. To, co jej zarazilo, bylo, že v čase asi c/a_0 se jím pozorovaná závislost velikosti Země na čase začala podstatně odchylovat od předpovězené funkce (7).

Časový odhad dostaneme jednoduchou úvahou – kdybychom neznali speciální teorii relativity, byla by to doba, za kterou raketa dosáhne rychlosti světla.

Jak vyjádříme velikost rychlosti v relativitě? Ze zadání víme, že posádka rakety cítí stále stejné zrychlení a . Zavedme nejdřív novou veličinu, tzv. rapiditu, jako

$$r = c \operatorname{arctgh} \frac{v}{c}.$$

která má tu správnou vlastnost, že je lineární vzhledem k Lorentzově transformaci⁵. To znamená, že známe-li rapiditu systému \mathcal{A} vůči systému \mathcal{B} a rapiditu systému \mathcal{B} vůči systému \mathcal{C} , je rapidita \mathcal{A} vzhledem k \mathcal{C} pouhým součtem předchozích dvou. Co to pro nás znamená? Řekněme si, že letící raketa je v určitém okamžiku inerciální soustavou s rychlostí v (tedy k Zemi má rapiditu r). V dalším okamžiku je to soustava s rychlostí v_1 a rapiditou $r + dr$ vůči předchozí

⁵⁾ Více např. na Wikipedii, <http://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity>.

soustavě. A tak bychom mohli pokračovat dál a dál a vždy přičteme stejnou hodnotu dr , tedy celková rapidita vůči Zemi roste lineárně s časem. Konstantu úměrnosti označme α . Tedy

$$\alpha t = c \operatorname{arctgh} \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = c \operatorname{tgh} \frac{\alpha t}{c}.$$

Z toho už jednoduše vypočítáme závislost vzdálenosti na čase ($v = ds/dt$), která vyjde

$$s = \frac{c^2}{\alpha} \log \cosh \frac{\alpha t}{c}.$$

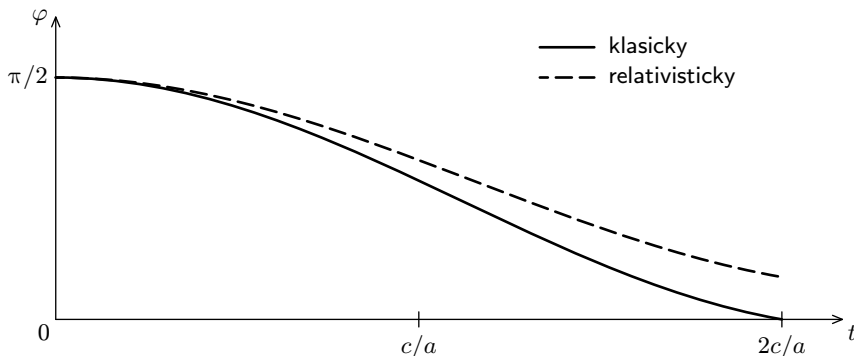
A stejně vypočítáme skutečné zrychlení ($a = dv/dt$).

$$a = \frac{\alpha}{\cosh^2 \frac{\alpha t}{c}}.$$

Vidíme, že pokud $c \rightarrow \infty$, jmenovatel bude roven 1 a tedy $\alpha = a_0$. Pokud provedeme stejnou limitu se vztahy pro s a v , dostaneme klasické rovnice (můžete si sami ověřit třeba použitím Taylorova rozvoje hyperbolických funkcí).

Tedy hledaná závislost velikosti zorného úhlu na čase bude v relativistickém případě

$$\varphi = \frac{Ra}{Ra + c^2 \log \cosh \frac{at}{c}}.$$



Obr. 6. Graf závislosti velikosti zorného úhlu počítané různými metodami

Na obrázku 6 vidíme srovnání klasické a relativistické závislosti. Je vidět, že k jejich odchýlení dojde už dříve než v čase c/a , nicméně jako odhad je tato hodnota postačující.

Tedy co odpoví kapitán lodi? Nejdřív prezentuje klasickou závislost. Turista si ale pravděpodobně dál bude stěžovat na to, že to nefunguje přesně. V tu chvíli se vytasí s relativistickým odvozením a vytře mu zrak.

Nicméně, turista by musel mít opravdu dobré oči. Už docela brzo by se mu Země ztratila z dohledu, protože člověk nerozliší objekty menší než $1''$. A i kdyby si vezl dalekohled, dříve nebo později by se světlo od Země odražené ztratilo v infračervené části spektra kvůli rudému posuvu.

Ve vašich řešeních jste buď rovnou řešili relativistický případ (což bylo více bodováno i v případě, že jste se zamotali) a správně určili dobu, za kterou jev bude patrný (a byli i tací, kteří nezapomněli na Dopplerův posun, za což jim patří pochvala), nebo jste rozebrali klasickou limitu.

U relativistů bylo největším problémem špatné určení příčiny jevu – kontrakce délek se vztahuje na měření v pohybuující se soustavě vzhledem k statické, nikoliv na jejich vzdálenost; klasikové většinou problémy neměli.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. P ... milenecká (5 bodů; průměr 2,45; řešilo 29 studentů)

Jak se změní teplota pod peřinou, pokud jsou pod ní dva lidé místo jednoho?

Vymyslel zmrzlý (jinak žhavý :-)) milovník Honza P.

K vyřešení úlohy se musíme zamyslet nad fyzikálními parametry člověka. Zdravý člověk má téměř konstantní tělesnou teplotu 36,5°C, která se nemění ani při velkých změnách teploty okolí ani při velmi diferencované svalové činnosti. V lidském těle při látkových přeměnách dochází k pomalé oxidaci uhlovodíků, tuků a bílkovin přijatých v potravě. Tyto chemické reakce jsou zdrojem energie pro činnost svalů a vnitřních orgánů. Životní procesy jsou provázeny vývinem tepla – tepelnou produkcí člověka, která závisí především na intenzitě činnosti člověka a také na jeho hmotnosti. V úplném klidu (v klidném, hlubokém spánku) dochází v těle k minimálnímu vývinu tepla odpovídajícímu základní látkové výměně. Tento bazální metabolismus (tepelná produkce člověka P) činí dle normy ISO 7243 asi 85 W.

Problém se tedy redukuje na nalezení rovnovážné teploty T vzduchu pod peřinou, při které se přes peřinu odvede teplo $\Delta Q = 85 \text{ J}$ každou vteřinu. V tom případě můžeme využít vztahu pro vedení tepla vrstvou materiálu mezi dvěma konstantními teplotami

$$\Delta Q = \lambda S \frac{\Delta T}{d} \tau,$$

kde konstanta λ je součinitel tepelné vodivosti, S je plocha peřiny, d je její tloušťka, τ doba trvání tepelné výměny a $\Delta T = T - T_0$ je rozdíl teploty T pod peřinou s teplotou T_0 okolí.

V rovnováze tedy platí $\Delta Q = P\tau$ a z toho vyjde rozdíl teplot

$$\Delta T = \frac{Pd}{\lambda S}.$$

Plochu peřiny potřebnou k přikrytí jedné osoby můžeme odhadnout na $S = 1,5 \text{ m}^2$, tloušťka naší peřiny je $d = 2 \text{ cm}$. Pro materiály, jimiž se plní peřiny (peří, vlna, rouno) se udává konstanta λ mezi 0,05 až 0,07 $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, vezmeme tedy $\lambda = 0,06 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Pro jednoho člověka pod peřinou nechť je rozdíl teplot ΔT_1 , pro dva pak ΔT_2 . Po dosazení vyjde $\Delta T_1 \doteq 18,9 \text{ K}$. To se na první pohled může zdát hodně, ale musíme si uvědomit, že jsme neuvažovali tepelný přenos přes matraci a tepelnou výměnu způsobenou prouděním vzduchu netěsnostmi mezi peřinou a podložkou.

V případě se dvěma lidmi budeme uvažovat tepelnou produkci člověka $P_2 = 2P$ a k přikrytí dvou lidí stačí řekněme peřina s plochou $S_2 = 1,75 S$ (na přikrytí dvou lidí ležících je potřeba určitě větší peřina než k přikrytí jednoho, ale jistě také menší než dvojnásobek peřiny pro jednoho člověka). Ostatní konstanty zůstanou nezměněny. Po dosazení těchto změn dostáváme

rozdíl teploty pod peřinou s okolní teplotou

$$\Delta T_2 = \frac{2Pd}{1,75 \lambda S},$$

což je po vyčíslení přibližně $\Delta T_2 \doteq 21,6 \text{ K}$.

V zadání jsme se ptali, jak se změní teplota pod peřinou, když pod ní budou místo jednoho jednoho člověka dva lidé. Pro velikost této změny platí

$$\Delta T_2 - \Delta T_1 = \frac{P}{7d} \lambda S,$$

což číselně vychází přibližně $\Delta T \doteq 2,7 \text{ K}$.

Kupodivu častou chybou v došlých řešeních byla chybná úvaha, že peřina je adiabatická izolace, tedy nedovoluje tepelnou výměnu s okolím. To by pro chudáka člověka, který je vlastně tepelný zdroj, znamenalo pomalé ohřívání sebe sama. Mnozí řešitelé také projeví lítost nad zadáním této úlohy jako teoretické a nikoliv jako experimentální. K tomu nezbývá, než dodat, pokud fyzik někde vidí problém k jehož řešení by mu pomohl experiment, tak ho proveďte, aniž by k němu byl někým vyzván.

Zdeněk Kučka

zdenek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. E ... šikmá věc (8 bodů; průměr 3,71; řešilo 17 studentů)

Kolik vody musí být v PET lahvi postavené na uzávěr, aby její stabilita byla největší (při vychýlení ze svislé polohy spadne ze nejdelší čas)? Nezapomeňte na teoretickou předpověď.

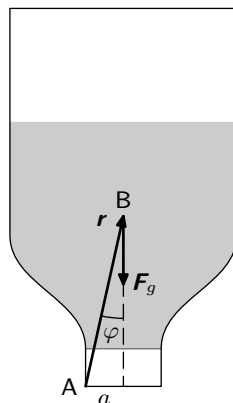
Nad vypitou lahví se zamyslel Běda.

Teorie

Je třeba se zamyslet nad tím, jaké si zvolíme kritérium, podle kterého budeme hodnotit stabilitu lahve s vodou. Omlouváme se za kritérium nastíněné v zadání, které je trochu matoucí.

Bod hrany víčka, kolem kterého se lahev otáčí, označme **A**, těžiště **B**, vektor z bodu **A** do **B** bude **r**, úhel sevřený vektorem **r** a svislým směrem je φ , průmět **r** do vodorovného směru je poloměr víčka, který označme *a*. První kritérium, které nás pravděpodobně napadne, je velikost momentu síly **M**, kterým je třeba na lahev působit, abychom ji převrátili. Ovšem $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g$. Velikost *M* je rovna součinu velikosti F_g a průmětu vektoru **r** do směru kolmého na \mathbf{F}_g , tento průmět je roven *a* (viz obrázek). Přiléváním vody do lahve roste úměrně \mathbf{F}_g , avšak *a* se vůbec nemění. Přirozeně podle tohoto kritéria je tedy lahev tím stabilnější, čím více je v ní vody.

Roзумně kritérium stability je rozhodně práce *W* potřebná k převržení. *W* odpovídá součinu $m\Delta h$, kde Δh je potřebné zvednutí těžiště k převržení. Zanedbejme na chvíli vlastní hmotnost prázdné lahve a fakt, že se voda přelívá, a uvažme, že lahev je válcová. Při užití těchto silných zjednodušení si lze rozmyslet, že výraz $m\Delta h$ bude maximální při minimálním množství vody. Když zjednodušení opustíme, dojdeme k závěru, že maximální práci potřebnou k převržení a tedy největší stabilitu dostaneme pro částečně naplněnou lahev.



Obr. 7. PET lahev „vzhůru nohama“

My budeme zkoumat ale ještě jiné kritérium stability, a to dobu T , za kterou se lahev vrátí do svislé polohy, když jsme ji předtím vychýlili. Nikoli tedy dobu pádu lahve na zem, jak jsme navrhovali v zadání, ale dobu pádu zpět do svislé polohy. Kratší doba T znamená větší stabilitu. Uvažujme na chvíli, že voda v lahvi je „zamrzlá“, tedy že se nepřelívá. Když lahev trochu vychýlíme ze svislého směru a pustíme, lahev se vrací do svislé polohy, přičemž úhel φ se mění podle rovnice

$$J\ddot{\varphi} = mgr \sin \varphi, \quad (8)$$

kde $\ddot{\varphi}$ značí druhou derivaci φ podle času, tedy úhlové zrychlení, J je moment setrvačnosti lahve vůči bodu A. Máme diferenciální rovnici pro neznámou funkci $\varphi(t)$, která vyjadřuje fakt, že moment setrvačnosti tělesa krát úhlové zrychlení je rovno momentu působící síly. Pokusme se aspoň kvalitativně zjistit, jak funkce $\varphi(t)$ vypadá. V případě malých úhlů je $\sin \varphi \approx \varphi$ a rovnici (8) lze psát ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgr}{J} \varphi. \quad (9)$$

Tato rovnice nám říká, že druhá derivace funkce $\varphi(t)$ je rovna té samé funkci $\varphi(t)$, která je pouze přenásobená konstantou. Vzpomeneme si, jak se derivuje exponenciála a přijdeme na to, že funkce vyhovující (9) jsou tvaru

$$\varphi(t) = Ce^{t\sqrt{mgr/J}} + De^{-t\sqrt{mgr/J}} \quad (10)$$

pro nějaké reálné konstanty C a D . Úhel φ v okamžiku, kdy lahev pouštíme, označme φ_0 , úhel φ odpovídající svislé poloze značme φ_1 .

Na začátku platí $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Pro splnění těchto dvou počátečních podmínek je třeba v (10) položit $C = D = \varphi_0/2$. Následně ještě vyložíme v paměti definiční vztah pro hyperbolický kosinus $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Řešení pohybové rovnice (9) při splnění počátečních podmínek je proto

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cosh \left(t \sqrt{\frac{mgr}{J}} \right). \quad (11)$$

Dobu pádu T z polohy $\varphi(0) = \varphi_0$ do svislé polohy $\varphi(T) = \varphi_1$ dostáváme vyjádřením z (11)

$$T = \sqrt{\frac{J}{mgr}} \operatorname{argcosh} \frac{\varphi_1}{\varphi_0}. \quad (12)$$

Pro různá množství vody m budeme měřit čas T odpovídající průchodu mezi polohami φ_0 a φ_1 . Ve všech měřeních na počátku láhev vychýlíme stejně. Musíme si ale uvědomit, že pro různá množství vody v lahvi odpovídají počáteční výchylce a svislé poloze různé hodnoty $\varphi_0(m), \varphi_1(m)$. Stejně tak $J(m)$ a $r(m)$ jsou nekonstantními funkcemi hmotnosti m . Funkce $T(m)$ má pak celkem komplikovaný průběh, který zjistíme měřením.

Následující úvahu si důkladně rozmyslete. Přilítím malého množství vody se sníží poloha těžiště a hodnota výrazu φ_1/φ_0 v (12) se zmenší. J se změní nepatrně, m trochu vzroste, zatímco r se o něco zmenší, ovšem výraz pod odmocninou se celkově zmenší. Ze začátku tedy přiléváním vody dostáváme menší časy T , pro malá m je funkce $T(m)$ klesající. Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že pro hodnoty m odpovídající téměř plné lahvi je funkce $T(m)$ naopak rostoucí. Odtud plyne, že pro určité m nabývá $T(m)$ minima.

Doposud jsme uvažovali, že voda je v lahvi „zamrzlá“. Když se voda přelévá, při vychýlení lahve je těžiště níže než pro zamrzlou vodu. Pravděpodobně proto reálně dostaneme časy T

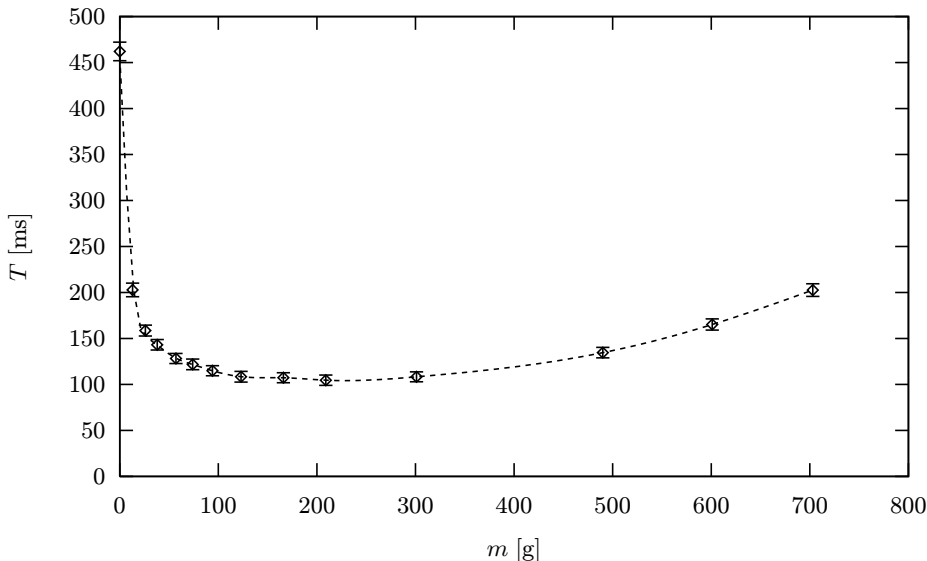
větší než v odhadu podle (12); pro velká množství vody bude tato odchylka méně výrazná. Aproximace $\sin \varphi \approx \varphi$ naopak způsobí, že předpovídáme větší časy než skutečné; opět pro velká m je tato odchylka méně výrazná.

Všimněme si, že pro $\varphi_0 \rightarrow 0$ (tedy poloha „vleže“) dostáváme časy jdoucí k nekonečnu a měřený čas T by tedy velice silně závisel na počátečním φ_0 . To by do měření vneslo velkou nepřesnost.

Měření

Použili jsme litrovou lahev od mléka, protože má větší víčko a lahev je tak stabilnější. Víčko je navíc pěkně ploché. Hmotnost prázdné láhve je 37 g. Zespodu na dno lahve jsme pomocí tavné pistole přidělali špejli, vznikl tak jakýsi bodec. Budeme měřit čas T průchodu bodce mezi polohami, které odpovídají úhlům $\varphi_0(m)$ a $\varphi_1(m)$.

K měření uijeme spojení dvou optických závor. Optickou závorou rozumíme kombinaci LED a fototranzistoru (dále FT), přičemž LED osvětluje FT. Neosvětlený FT je uzavřený, osvětlením se otevírá. Připojme na zdroj napětí do série FT a odpor R . V našem případě zdroj je 9V baterie a $R = 100 \Omega$. Při osvětlení se FT otevírá, roste proud, napětí na R stoupá a na FT klesá. Na stejný zdroj zapojme paralelně k první větvi ještě druhou shodnou větev, tedy sériové spojení FT' a R' . Pozorujeme rozdíl napětí ΔU na R a R' . Jsou-li oba FT osvětleny, je ΔU nulové. Při chvilkovém zastínění jednoho z FT pozorujeme napěťový puls. Napětí ΔU přivedeme na konektor JACK, který strčíme do zdířky počítače pro mikrofon.



Obr. 8. Výsledné hodnoty proložené křivkou

Například pomocí programu Audacity můžeme sledovat časový průběh přivedeného napětí a odměřit časový odstup pulsů. Musíme dát pozor, aby ΔU nebylo příliš vysoké, čímž bychom si mohli poškodit počítač. Bohatě postačuje pracovat s napětími ΔU řádově v desetínách voltu. Toho docílíme třeba tak, že do série za R a FT do každé z větví zapojíme ještě odpor řádově větší, v našem případě 10 k Ω . Ze stejné baterie je možno napájet i LED, které s předřadným odporem zapojujeme paralelně k již existujícím dvěma větvím.

Ze stavebnice Merkur jsme si postavili konstrukci, na které jsou umístěny obě optické závory a která zaručuje konstantnost počátečního vychýlení.

Měřené časy T jsou malé, řádově v desetinách sekundy. Abychom dokázali určit, kdy je lahev nejstabilnější, vyžadujeme přesnost minimálně v řádu setin sekundy, lépe však v řádu milisekund. Proto se raději vyhneme měření ručně stopkami. Měření pomocí optické závory našemu požadavku vyhovuje. Odezva FT (tedy prodleva mezi osvětlením a otevřením) je o několik řádů nižší než požadovaná přesnost a nemusí nás trápit.

Výsledky měření shrnuje tabulka a graf, kde je vynesena závislost času T na hmotnosti vody v lahvi m . Pro každé m jsme provedli několik měření, abychom si udělali obrázek o přesnosti. T získáme jako průměr. V tabulce je pro každé m uvedena směrodatná odchylka souboru měření. Rovněž uvádíme z toho plynoucí statistickou nepřesnost aritmetického průměru u_{stat} . Potěšující je, že je směrodatná odchylka řádově v milisekundách. Výslednou chybu určení T odhadujeme o 5 ms větší než je u_{stat} , protože je třeba uvážit i možnost systematické chyby.

Minimální T odpovídá zhruba hmotnosti vody $m = 200 \pm 50$ g, při tomto množství vody prohlásíme lahev za nejstabilnější.

Graf potvrzuje naše kvalitativní závěry učiněné v teoretickém rozboru.

Tabulka výsledků měření

m [g]	0	13	26	38	57	74	94
T [ms]	450	206	160	147	130	119	114
	475	197	160	141	127	122	114
	477	204	155	141	127	126	115
	482	200	158	144	131	121	114
	473	198	156	144	128	122	113
	463	196	158	143	130	120	118
	444	221	164	142	126	125	117
	435	198	160	141	127	119	114
	460	205	156	145	128	122	115
\bar{T} [ms]	462	203	159	143	128	122	115
σ [ms]	15	7	3	2	2	2	2
u_{stat} [ms]	5	2	1	1	1	1	1
m [g]	123	166	209	301	490	601	703
T [ms]	108	108	105	110	137	161	202
	108	107	102	107	135	172	212
	103	106	108	107	136	166	201
	111	106	102	110	136	167	192
	108	107	104	108	131	168	197
	111	107	107	107	131	162	207
	112	107	104	109	136	162	204
	108	110	105	107	134	164	200
	107	108	104	110	135	165	208
\bar{T} [ms]	108	107	105	108	135	165	203
σ [ms]	3	1	2	1	2	3	6
u_{stat} [ms]	1	1	1	1	1	1	2

Poznámky k došlým řešením

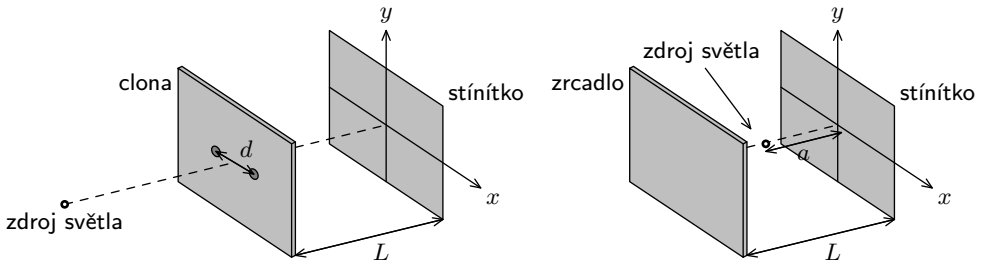
Velká část z vás dospěla k závěru, že lahev je tím stabilnější, čím víc je v ní vody. Jak jsme ukázali, závisí náš závěr na volbě kritéria stability. Závěrem bychom jen chtěli připomenout, že při měření je třeba se aspoň základním způsobem zamyslet nad velikostí chyby. Nepožadujeme žádné hluboké analýzy nepřesností, stačí stručná a jasná zmínka. Měříme-li ručně stopkami čas zhruba půl sekundy, je na místě provést měření několikrát a následně se zamyslet, jak důvěryhodné jsou naše výsledky.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. S ... Young a vlnová povaha světla (5 bodů; průměr 2,50; řešilo 6 studentů)

- a) Jaký tvar interferenčních proužků na stínítku byste očekávali v následujících dvou sestavách? Najděte rovnice křivek maximální intenzity a zkuste jich několik načrtnout.



- b) Ukažte, jak by dopadl Youngův experiment, jestliže by se světlo chovalo podle Newtonových představ (tzn. difrakce ano, interference ne). Nezapomeňte vzít v úvahu různý úhel dopadu světla na různá místa stínítka.
- c) Užitím vyloženého kvantově-mechanického popisu určete rozložení intenzity, jaké by dostal Jöhnsson při použití čtyřšterbiny (tedy čtyř úzkých rovnoběžných otvorů rozmístěných ve vzdálenostech b od sebe). Načrtněte reprezentativní úsek grafu a okomentujte přednosti většího počtu otvorů.

Vymysleli autoři seriálu.

Interferenční proužky

Správné řešení prvního úkolu se mohlo sestávat jen z pouhých dvou slov: hyperboly, kružnice. Úvaha pro první obrázek zní takto: Jelikož interferenční maximum vzniká v místech s konstantním rozdílem optických drah rovným celočíselnému násobku vlnové délky světla, vytvoří se kolem otvorů v prostoru plochy konstantního rozdílu mezi vzdálenostmi k jednomu a druhému otvoru. Podle analytické geometrie má hyperbolická plocha vlastnost, že rozdíl vzdáleností každého jejího bodu ke dvěma ohniskům je konstantní. To je přesně náš případ. Když tuto plochu nyní řízne stínítkem, dostaneme hyperboly – hyperbolické proužky.

Pokud je to pro vás příliš abstraktní představa, sledujte následující konvenční postup: Zavedeme souřadnice (x, y, z) tak, že stínítko leží v rovině xy a osa z míří od něj směrem k desce s průhledy (vzdálené L) a prochází přímo mezi otvory. Osa x nechť je rovnoběžná se spojnicí otvorů, které jsou ve vzájemné vzdálenosti d . Bod na stínítku má proto souřadnice $A = (x, y, 0)$, otvory v cloně $H_{1,2} = (x \pm d/2, 0, L)$. Vzdálenosti $L_{1,2} \equiv |AH_{1,2}|$ jsou podle

zobecněné Pythagorovy věty

$$L_1 = |\text{AH}_1| = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$L_2 = |\text{AH}_2| = \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Abychom dostali interferenční maximum, úplné konstruktivní složení světelných vln přicházejících z jednotlivých otvorů, musí platit

$$L_1 - L_2 = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

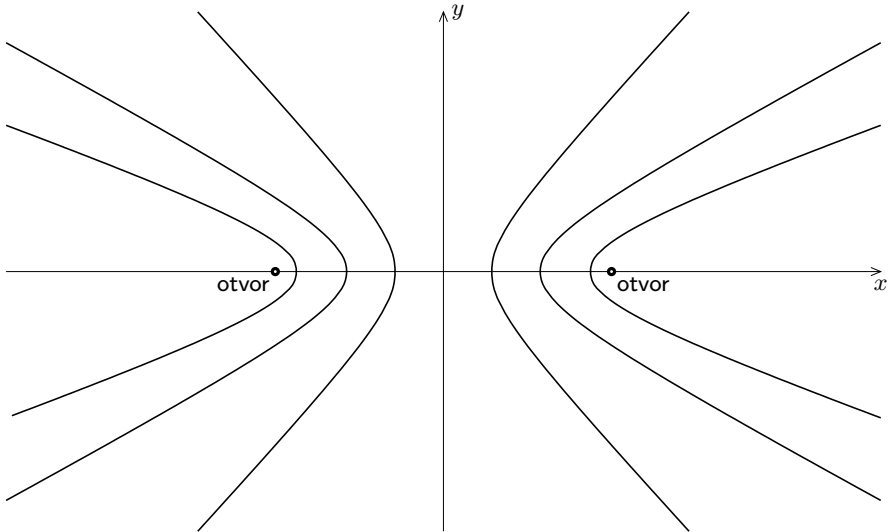
Dosadíme-li první dvě rovnice do této podmínky, vyjde po delší úpravě

$$x^2 \left(\frac{d^2}{k^2 \lambda^2} - 1 \right) - y^2 = L^2 - \frac{1}{4} (d^2 + k^2 \lambda^2).$$

Pro typickou situaci $L \gg d \gg \lambda$ lze navíc vztah zjednodušit na

$$x^2 \frac{d^2}{k^2 \lambda^2} - y^2 = L^2,$$

což je tvar rovnice hyperboly. Několik reprezentativních proužků je na obrázku 9.

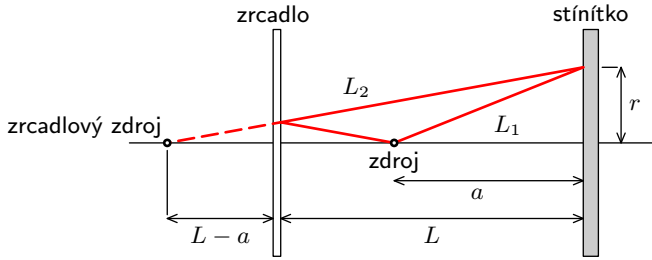


Obr. 9. Interferenční proužky

V druhém případě si rotační symetrie vynucuje kruhové proužky. Pokud by nás opět zajímaly jejich přesné rozměry, postupovali bychom podobně jako v předchozím. Délky drah jsou (viz obrázek 10)

$$L_1 = \sqrt{a^2 + r^2},$$

$$L_2 = \sqrt{(2L - a)^2 + r^2}.$$



Obr. 10. Porovnání délek drah paprsků

Aplikací podmínky $\delta \equiv L_2 - L_1 = (k + 1/2)\lambda$ (polovina vlnové délky odpovídá otočení fáze při odrazu o zrcadlo) dostaneme

$$r^2 = \frac{1}{4\delta^2} (4(L-a)^2 - \delta^2) (4L^2 - \delta^2).$$

Pokud se bavíme o interferenčních kroužcích daleko od optické osy, členy δ^2 jsou zcela nesouměřitelné s členy úměrnými L^2 . Proto je můžeme zanedbat a psát

$$r \approx \frac{2L}{\delta} (L-a).$$

Blízko ose musíme ale použít přesný vztah; zjednodušený vzorec připouští libovolný dráhový rozdíl, z geometrie sestavy však víme, že maximální možný je $\delta_{\max} = 2(L-a) + \lambda/2$.

Young vs. Newton

Světlo se za každou štěrbinou rozptyluje díky difrakci do všech směrů. Intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti (protože počet „částic světla“ na kulové vlnoploše o obsahu $4\pi r^2$ se zachovává) a kosinem dopadového úhlu (protože na nakloněnou rovinu dopadá světlo s menší plošnou hustotou než na rovinu kolmou ke směru šíření). Bod A na stínítku má délkovou souřadnici x , jeho vzdálenost od štěrbin je opět $L_{1,2} = \sqrt{L^2 + (x \pm d/2)^2}$, pro úhel dopadu $\vartheta_{1,2}$ paprsku z jedné a druhé štěrbinu platí

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1,2} = \frac{1}{L} \left(x \pm \frac{d}{2} \right).$$

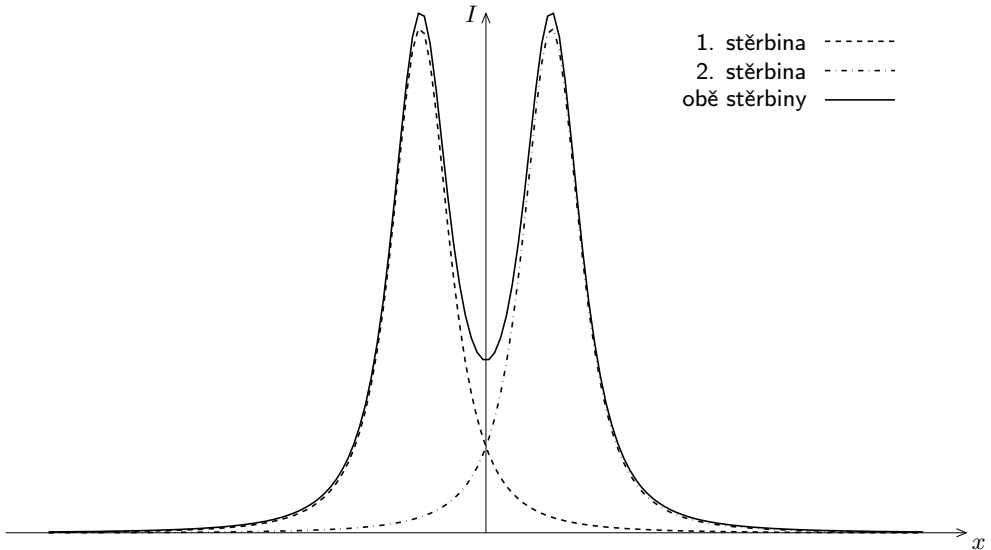
Z toho vyčíslíme potřebný kosinus,

$$\cos \vartheta_{1,2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}_{1,2}^2 \vartheta} = \frac{L^2}{L^2 + \left(x \pm \frac{d}{2} \right)^2}.$$

Výsledná intenzita je v newtonovském případě (skládá se až četnost dopadů „světelných částic“, ne amplituda) rovna jednoduchému součtu intenzit od jednotlivých štěrbin,

$$I = \frac{I_0}{L_1^2} \cos \vartheta_1 + \frac{I_0}{L_2^2} \cos \vartheta_2 \sim \frac{1}{\left(L^2 + \left(x + \frac{d}{2} \right)^2 \right)^2} + \frac{1}{\left(L^2 + \left(x - \frac{d}{2} \right)^2 \right)^2}.$$

Graf je na obrázku 11. Z něj i ze získaného vzorce je zřejmé, že intenzita v každém bodě stínítka vzroste při otevření druhé štěrbině.



Obr. 11. Intenzita světla po průchodu dvojštěrbínou

Světlo na čtyřštěrbině

Amplituda pravděpodobnosti detekce elektronu v jistém bodě B stínítka je podle druhého dílu seriálu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1(x) + \cos \varphi_2(x) + \cos \varphi_3(x) + \cos \varphi_4(x) \\ \sin \varphi_1(x) + \sin \varphi_2(x) + \sin \varphi_3(x) + \sin \varphi_4(x) \end{pmatrix},$$

kde $\varphi_j(x)$ jsou fáze, s jakými takový foton dorazí do B od j -tého otvoru. Procesy „foton do B dorazí od otvoru j “ jsou nerozlišitelné (výsledkem je vždycky stejná tečka na stínítku), takže proto sčítáme jednotlivé amplitudy. Představíme-li si takovou čtyřštěrbinu s průřezy vzdálenými o b od sebe, bude podle textu seriálu platit

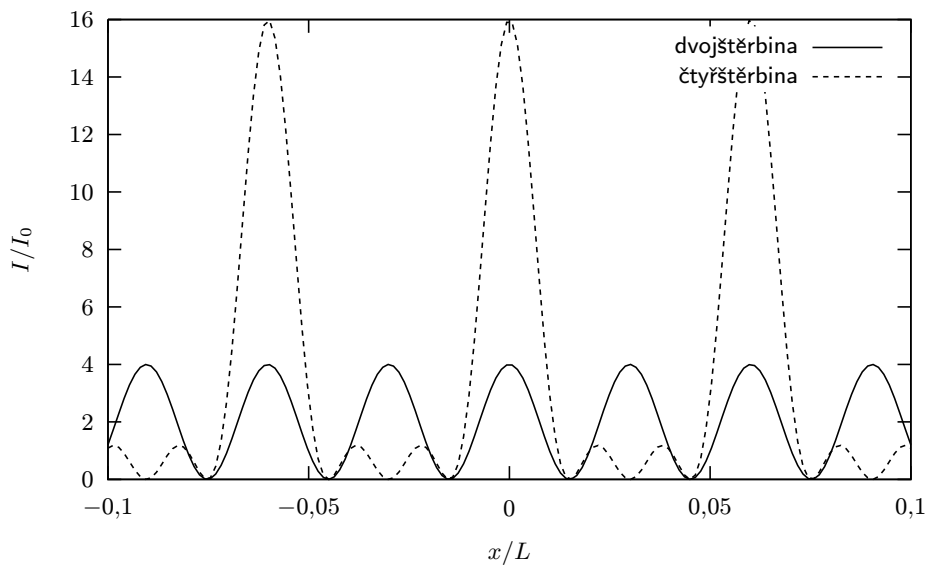
$$\varphi_1(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x - 1,5b)^2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x - 0,5b)^2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x + 0,5b)^2},$$

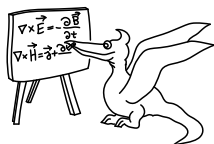
$$\varphi_4(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x + 1,5b)^2}.$$

Vykreslíme-li druhou mocninu velikosti amplitudy, ideálně na počítači, dostaneme graf na obrázku 12 (čárkovaně). Spojitou čarou je vynesena analogická závislost pro dvojštěrbinu. Je zřetelně vidět, že u čtyřštěrbiny výrazných proužků ubylo (na polovinu) a jsou čtyřikrát jasnější. Obojí podstatně vylepšuje viditelnost jevu. Proto se v běžných difrakčních experimentech používají *difrakční mřížky* skládající se ze stovek až tisíců vrypů.



Obr. 12. Porovnání intenzit pro dvoj a čtyřštěrbinu

Jakub Benda
jakub@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Foucault a rotace Země

Na počátku devatenáctého století už byla představa Země jako rotující planety zcela běžná a zažitá. Mluvily pro to zejména dva podstatné experimentální poznatky (vyjma pohybu hvězd, samozřejmě). Jednak to bylo nade vší pochyby prokazatelné zploštění Země na pólech a naopak vyboulení na rovníku, kde gravitace měla být slabší o odstředivou sílu. Rozdíl rozměrů činil asi $1/300$ poloměru. Druhým pozorovaným jevem byla aberace světla přicházejícího z vesmíru, o níž jsme mluvili už v minulém seriálu. Zde byla podstatná tzv. *denní aberace*, totiž vliv rotace Země na zdánlivou polohu nebeských těles.

Přesto jak učené společnosti tak veřejnosti scházela jednoznačná dynamická pomůcka, která by rotaci planety detekovala. V polovině devatenáctého století se s nimi rozrhl pytel. Roku 1851 přišel francouzský vědec *Léon Foucault* s jedním z nejproslavenějších fyzikálních experimentů. Nejprve v Poledníkové síni pařížské observatoře a posléze i ve velké pařížské chrámové hrobce, Panthéonu, zavěsil dlouhé, precizně připravené kyvadlo s těžkým závažím na konci. V druhém případě se jednalo o ocelový drát dlouhý 67 metrů a olovenou kouli o hmotnosti 28 kg. Kyvadlo opatrně rozhoupal a – k úžasu přítomných – se rovina kyvu během následujících hodin začala „bezduvodně“, po směru hodinových ručiček, otáčet. Takový jev jistě není překvapivý, pokud si představíme podobné kyvadlo na pólu. Na první pohled ale není jasné, jestli i v jiných zeměpisných šířkách se rovina kyvu bude otáčet stejně rychle jako na pólech. A jak publikum v Paříži rychle zpozorovalo, skutečně tomu tak nebylo.

Cardan, Cartan a Coriolis

Jediné síly působící na kyvadlo (zanedbáme-li odpor vzduchu a různé pnutí v drátu) jsou gravitační, která definuje směr „dolů“ a udává tím podmínku na rovnovážnou polohu, a síla závěsu, která také nikdy nemíří mimo aktuální rovinu kyvu. Žádná skutečná síla stáčení evidentně nepůsobuje.

Protože ale rotující planeta není inerciální soustava, musíme do našich silových úvah zapracovat ještě dvě další, fiktivní síly: odstředivou a Coriolisovu. Prvá je v rozsahu kyvu kyvadla konstantní co do směru a velikosti, takže se většinou začlení do tíhového zrychlení. Coriolisova síla je

$$\mathbf{F}_C = -2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad (14)$$

kde \mathbf{v} značíme okamžitou rychlost kyvadla, m hmotnost závaží a $\boldsymbol{\Omega}_0$ úhlovou rychlost rotace Země. Budeme předpokládat, že vliv síly (14) je malý a kyvadlo se mnohokrát zhoupne než se rovina kyvu výrazně pootočí. Pak můžeme jeho pohyb považovat za lineární jako u běžného dlouhého matematického kyvadla. Pro výchylku a rychlost pak platí

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad v(t) = x_0 \omega \sin \omega t, \quad a(t) = x_0 \omega^2 \cos \omega t. \quad (15)$$

Rychlost kyvadla je vždy tečná k povrchu planety v daném místě. Pokud ϕ je zeměpisná šířka daného místa, je velikost Coriolisova zrychlení

$$a_C = \frac{|\mathbf{F}_C|}{m} = 2x_0\omega\Omega_0 \sin \phi \sin \omega t. \quad (16)$$

Zrychlení (16) míří vždy kolmo na směr rychlosti závaží, kterou ve shodě se zjednodušujícími předpoklady považujeme za směřující stále stejným směrem, takže způsobuje vznik malé kolmé rychlosti v_{\perp} . Komu je jasné, že $v_{\perp}(t) = \int_0^t a_C dt$, necht' přeskóčí rovnou k následující rovnici. Ostatní vězte, že si můžeme (16) díky jeho harmonickému průběhu představit jako zrychlení vyvolávající malý kmit do strany. Rychlost v_{\perp} proto poroste také téměř harmonicky, ale ne „zprvu rychle a pak pomalu“ jako u běžného kyvadla s $a \sim \omega^2 \cos \varphi$, nýbrž „zprvu pomalu a pak rychle“ kvůli závislosti a na $\sin \omega t$. Tedy rychlost nezávisí na $\sin \omega t$, ale na $1 - \cos \omega t$. Výsledek je až na tuto odlišnost analogický známým vztahům (15),

$$v_{\perp}(t) = 2x_0\Omega_0 \sin \phi (1 - \cos \omega t) .$$

Kosinus je funkce, která má v intervalu od 0 do π (jeden kyv) střední hodnotu rovnou nule, tedy střední kolmá rychlost kyvadla je

$$\langle v_{\perp} \rangle = 2x_0\Omega_0 \sin \phi .$$

Kyvadlo se při jednom zhrounutí odchýlí přibližně o

$$\langle \Delta l \rangle = \frac{1}{2} \langle v_{\perp} \rangle T = x_0\Omega_0 T \sin \phi ,$$

což odpovídá změně úhlu (na délce $2x_0$)

$$\langle \Delta \vartheta \rangle = \frac{\langle \Delta l \rangle}{2x_0} = \frac{1}{2} \Omega_0 T \sin \phi .$$

Střední úhlová rychlost stáčení při jednom kyvu, Ω , pak činí

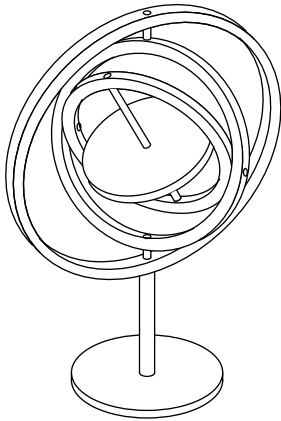
$$\langle \Omega \rangle = \frac{2 \langle \Delta \vartheta \rangle}{T} = \Omega_0 \sin \phi .$$

Když se kyvadlo po půlce periody vrací z nové amplitudy, nevrací se po stejné trajektorii zpět, neboť Coriolisova síla změni znaménko a naopak závaží z původní dráhy odchyluje, opět s průměrnou úhlovou rychlostí $\Omega_0 \sin \phi$. Můžeme tedy udělat závěr, který se nám bude později hodit, totiž že dynamické procesy na Zemi – na zeměpisné šířce ϕ – probíhají jako kdyby se jednalo o lokálně rotující soustavu s úhlovou rychlostí $\Omega_0 \sin \phi$, což je průmět Ω_0 na svislici v místě, kde stojíme.

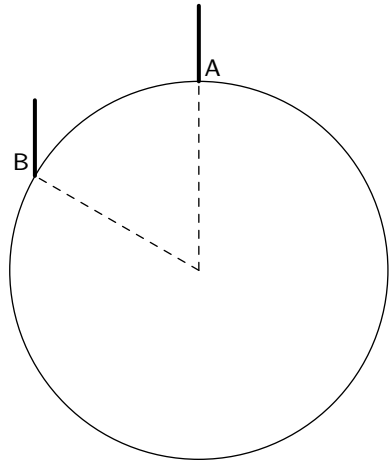
Samozeřejmě bychom stáli i o experiment, který by byl schopný ukázat rotaci Země nezkreslenou faktorem $\sin \phi$; o zařízení využitelné i při přepravě, které by zároveň ukazovalo skutečný směr rotace Země. Takové zařízení navrhnul Foucault v roce 1852. Jednalo se o gyroskop – setrvačnick, který, když je vhodným způsobem upevněn, zachovává svoji rotaci. Jednou z oblíbených variant upevnění je známý *Cardanův závěs* na obrázku 13. Jde o tři obruče spojené křížem vůči sobě umístěnými klouby.

Moderní matematika⁶ rozumí otázkám obdobným Foucaultově kyvadlu prostřednictvím pojmu *paralelní přenos*. Jedná se o čistě geometrický pojem, který je ovšem v mnoha případech velice užitečný až nutný. Podívejme se tedy, jak lze problém Foucaultova kyvadla řešit téměř bez fyziky.

⁶) Zbytek kapitoly je spíše pro ty, kteří se nebojí složitějších výrazů – jak jazykových, tak algebraických. Jeho pochopení není nutné k vyřešení úloh.



Obr. 13. Cardanův závěs



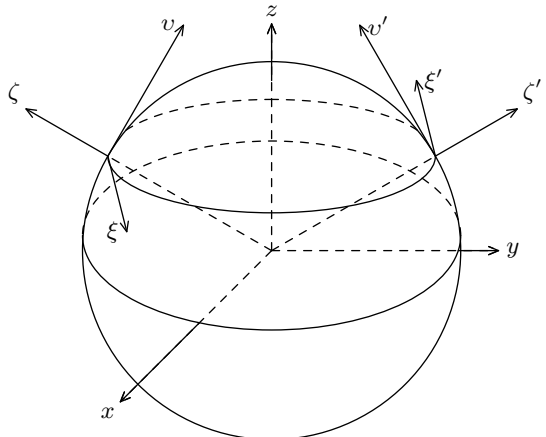
Obr. 14. Papír na rovníku

Zabývejme se studiem kyvadla v inerciální vztažné soustavě nespojené s planetou. Jak již bylo uvedeno, v této soustavě nepůsobí na kyvadlo žádná síla, která by kyvadlo vychylovala z roviny kmitů, a tato rovina se tak bude snažit zachovat vůči inerciální soustavě stálý směr. Přímočaré užití této myšlenky však vede k problémům, jak ukazuje následující zjednodušený příklad.

Sledujme shora rotaci Země, na jejímž rovníku v bodě A je držen list papíru, kolmý k povrchu planety. Po chvíli se list papíru rotací Země dostane do bodu B. Kdybychom v každém okamžiku požadovali, aby byl papír rovnoběžný se svým počátečním umístěním, dostali bychom pozici znázorněnou na obrázku 14.

Uvažujme nyní místo listu papíru právě rovinu kmitu kyvadla, o níž víme, že by se měla chovat podobně jako list papíru v předchozím příkladu. Tak ale rychle narazíme na komplikace, neboť nyní bychom byli nuceni prohlásit, že v bodě B se kyvadlo kýve v nesvislé poloze, totiž šikmo. (Představte si takové kyvadlo a podrobně si promyslete, co by to znamenalo.)

A jak se s tímto problémem vypořádá moderní matematika? Trikem. Prohlásí, že rovina kyvu zůstane při *malém* otočení *skoro* rovnoběžná. Ne přesně rovnoběžná, ale skoro. Pro konkrétní postup se ale již vrhneme do světa matematických symbolů. Vektor je veličina zadaná svým neměnným směrem a velikostí. Co změně naopak podléhá jsou složky vektoru – při jeho popisu



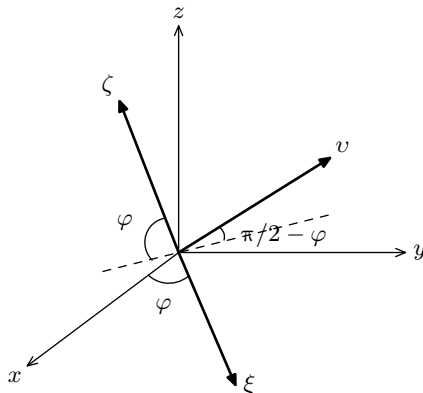
Obr. 15. Rotující planeta

v různých souřadnicích. První věc, kterou budeme na naší cestě potřebovat, je tedy studium změn složek vektoru při rotaci souřadnic.

Na obrázku 15 je náčrt rotující planety, dále inerciální souřadné soustavy $S : (x, y, z)$ nespojené s planetou a také souřadné soustavy $\Sigma : (\xi, v, \zeta)$ spojené s bodem na povrchu planety na ϕ -té rovnoběžce (Panthéonem), a to ve dvou denních dobách.

Na obrázku 16 vidíme oba souřadné systémy S i Σ přenesené k sobě pro lepší orientaci. Chvilka dumání nás přesvědčí, že bod se souřadnicemi (x, y, z) v S má, pokud je $\varphi = 0$, následující souřadnice v Σ :

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ v &= y \sin \phi + z \cos \phi, \\ \zeta &= -y \cos \phi + z \sin \phi.\end{aligned}\quad (17)$$



Obr. 16. Rotace souřadnic

V libovolném okamžiku je Σ' otočená o obecný úhel φ kolem osy z vůči S . Otáčet souřadnice zadané rovnicemi (17) by bylo obtížné, my si pomůžeme tím, že otočíme S kolem z o opačný úhel $-\varphi$. Taková transformace je v každých lepších tabulkách,

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z.\end{aligned}\quad (18)$$

Nahradíme x, y, z v (17) otočenými souřadnicemi x', y', z' z (18). Dostaneme obecný přepočítání mezi souřadnicemi bodu (nebo také složkami vektoru) v S a v Σ ,

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ v &= -x \sin \varphi \sin \phi + y \cos \varphi \sin \phi + z \cos \phi, \\ \zeta &= x \sin \varphi \cos \phi - y \cos \varphi \cos \phi + z \sin \phi.\end{aligned}\quad (19)$$

Poslední trojice vztahů nám tak říká, jaké souřadnice má vektor (x, y, z) v soustavě Σ .

Jak nyní využít (19) v našem problému? Tak jako každou rovinu, i rovinu kyvu kyvadla ve vyšetřovaném bodě a okamžiku můžeme jednoznačně určit pomocí jediného (normálového) vektoru \mathbf{n} . Tento vektor má vůči soustavě S obecně souřadnice (x, y, z) , ale v místní soustavě Σ má nutně jednu význačnou vlastnost, totiž že leží v horizontální rovině (neboť rovina kmitu je lokálně vertikální). Jeho souřadnice tudíž jsou $(\xi, v, 0)$. Je zde možná dobré poznamenat, že my pozorujeme právě to, co se odehrává v soustavě Σ , s níž jsme spjati.

Chvilku nyní vyčkejme. Země se pootočila o malý úhel $\Delta\varphi$. Co se stalo? Souřadnicím vektoru $\mathbf{n} = (x, y, z)$ v Σ už neodpovídá $(\xi, v, 0)$, nýbrž $(\xi + \Delta\xi, v + \Delta v, \Delta\zeta)$. Velikosti jednotlivých změn snadno určíme z rovnic (19), stačí jen dosadit $\varphi + \Delta\varphi$ za φ , použít součtové vzorce pro sinus a kosinus na rozložení výrazů a přibližné vzorce pro goniometrické funkce malých úhlů

$\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ a $\cos \varepsilon \approx 1$ na jejich úpravu⁷. Dostaneme tak

$$\begin{aligned}\Delta \xi / \Delta \varphi &\equiv \frac{\xi(\varphi + \Delta \varphi) - \xi(\varphi)}{\Delta \varphi} = -(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \\ \Delta v / \Delta \varphi &\equiv \frac{v(\varphi + \Delta \varphi) - v(\varphi)}{\Delta \varphi} = -(x \cos \varphi + y \sin \varphi).\end{aligned}\quad (20)$$

Zároveň víme, že v našem případě je $\zeta = 0$ (vektor \mathbf{n} , o němž se zajímáme, nemá žádnou svislou složku), což můžeme využít a v (19) eliminovat z ve výrazu pro v . Vyjde

$$v = (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{-1}{\sin \phi}.\quad (21)$$

Měníci se vodorovnou orientaci vektoru \mathbf{n} popíšeme jedním úhlem α , azimutem, definovaným standardně $\operatorname{tg} \alpha = v/\xi$. Konečně jsme schopni si odpovědět na otázku, jak se změni azimut při malém potočení Země.

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta \varphi} \equiv \frac{\Delta \operatorname{arctg} \frac{v}{\xi}}{\Delta \varphi} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{v(\varphi + \Delta \varphi)}{\xi(\varphi + \Delta \varphi)} - \operatorname{arctg} \frac{v(\varphi)}{\xi(\varphi)}}{\Delta \varphi} = \frac{1}{\Delta \varphi} \frac{\xi \Delta v - v \Delta \xi}{\xi^2 + v^2} = -\sin \phi.\quad (22)$$

Předposlední rovnost je samozřejmě švindl, po cestě je ještě potřeba udělat sadu kroků využívající součtové vzorce a uvedené přibližné vztahy, ale všechny jsou zcela přímočaré a analogické tomu, co jsme už jednou provedli. Poslední rovnost pak spočívá už jen v dosazení z (19), (20) a (21). Za jeden den ($\varphi = 2\pi$) se \mathbf{n} otočí ve vodorovné rovině o

$$\alpha_0 = -2\pi \sin \phi.$$

Úhlu α_0 se někdy říká *holonomní* nebo *geometrická* fáze.

Aby tu zaznělo i poslední jméno z nadpisu, zmiňme nyní francouzského matematika *Éliea Cartana*, kovářského synka, jenž urazil dlouhou cestu až k profesorství diferenciální topologie na Sorbonně v první polovině 20. století. Hlavně z jeho pera pochází velká část děl o paralelním přenosu a obecném geometrickém pojetí fyziky. Jak někteří možná tušíte, jím vybudovaný formalismus dnes slouží k nejelegantnějším formulacím (nejen) obecné teorie relativity.

Perrotův experiment aneb splachujeme záchod

Roku 1859 provedl Perrot jiný experiment, který si od oné doby také získal určité povědomí mezi lidmi. Velký válcový sud naplnil vodou, přiklopil poklicí a nechal několik dní odstát, aby vnitřní tření in kapalně a tření mezi ní a stěnami sudu zajistilo její úplný klid vzhledem k nádobě. Pokud měla být myšlenka o existenci lokální nenulové úhlové rychlosti pravdivá, při rychlém shromáždění této vody blíže centru sudu – tedy třeba při vypouštění malým kruhovým otvorem – se kvůli zachování momentu hybnosti musela zvětšit úhlová rychlost vody přitékající od krajů. Tak mělo dojít ke vzniku víru mířícího na dané polokouli vždy stejným směrem. O tom, jak malý je to však efekt, svědčí to, že Perrot nakonec musel dělat několik desítek pokusů a jejich statistické zpracování, a ani tak nebyl výsledek příliš přesvědčivý.

Na druhou stranu dneska víme o tvarech cyklon a anticyklon a mořských proudů na obou polokoulích a nemůžeme než konstatovat, že v takových měřítkách je efekt zřetelně pozorovatelný.

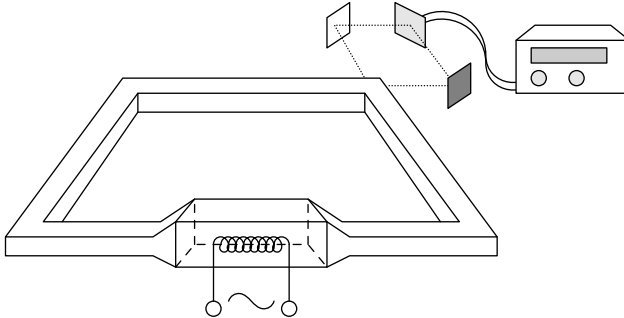
⁷⁾ Kdo umí derivovat, samozřejmě derivuje.

Moderní měření rotace Země

Překvapivě i dnes se stále v mnoha laboratořích přesně proměřuje rotace naší planety. V dnešní době se většinou jedná o detekci nepravidelností a dlouhodobého zpomalování rotace. Hlavní příčinou obojího je vliv slapových sil od Měsíce a Slunce.

Samozřejmě nejpreciznější metoda je pomocí satelitních naváděcích systémů. Ukazuje se ale, že družice nemají právě nejlepší časové rozlišení z důvodů technického rázu, zejména složitější komunikace.

V devadesátých letech minulého století se objevily první přístroje využívající tzv. *Sagnacův jev*, nazývané *laserové gyroskopy* nebo *prstencové lasery*. Jednoduché schéma je na obrázku 17.



Obr. 17. Prstencový laser

Prstencový laser je zpravidla čtvercová uzavřená trubice naplněná směsí helia a neonu. My tu budeme nicméně uvažovat pro jednoduchost trubici kruhovou. V určitém místě trubice je ionizační zařízení (realizované vysokofrekvenčním obvodem), které plyn excituje a ten vysílá paprsky elektromagnetického záření do obou směrů podél trubice. Jestliže plyn spolu s prstencem rotuje rychlostí ω (tedy například když je upevněný na desetimetrovém betonovém pilíři zapuštěném do skály na rotující planetě jako třeba jeden poměrně nový laser nedaleko bavorského Wetzellu), dojde vzhledem k inerciálnímu pozorovateli k Dopplerově efektu a fotony (paprsky) vyslané do opačných směrů budou mít různé frekvence

$$f_+ = f_0 \left(1 + \frac{\omega r}{c} \right) \quad \text{a} \quad f_- = f_0 \left(1 - \frac{\omega r}{c} \right), \quad (23)$$

kde f_0 je vlastní frekvence plynu, tedy jeho přirozená „zářivková“ barva, již nejintenzivněji přijímá a vysílá, r je poloměr prstence laseru a c rychlost světla. Tyto dva paprsky se šíří plynem a mohou excitovat další atomy, přičemž první (s vyšší frekvencí) excituje jen ty, které „dostihne zezadu“, a druhý (s nižší frekvencí) jen ty, s nimiž se „čelně srazí“, obojí z pohledu inerciálního pozorovatele. Právě a jen tehdy je frekvence molekulou přijímaného fotonu v její soustavě oněch oblíbených f_0 . Díky tomuto procesu (a neuvažujeme-li tepelný pohyb atomů plynu) existují pro oba paprsky opačné směry, v nichž se mohou šířit bez obavy z pohlcení. Po nějaké době strávené pumpováním energie do plynu prostřednictvím ionizátoru se ustanoví rovnováha mezi pohlcováním a vyzařováním fotonů a uvnitř krouží v opačných směrech dva stabilní paprsky s frekvencemi (23). Pokud z trubice část každého paprsku vyvedeme a pomocí zrcátek je soustředíme na jedno místo, světlo se složí a dostaneme interferenční rázy (interferenci v čase). To je relativně pomalé (ve srovnání s f_0) kolísání intenzity o frekvenci δf , která je rovna jako

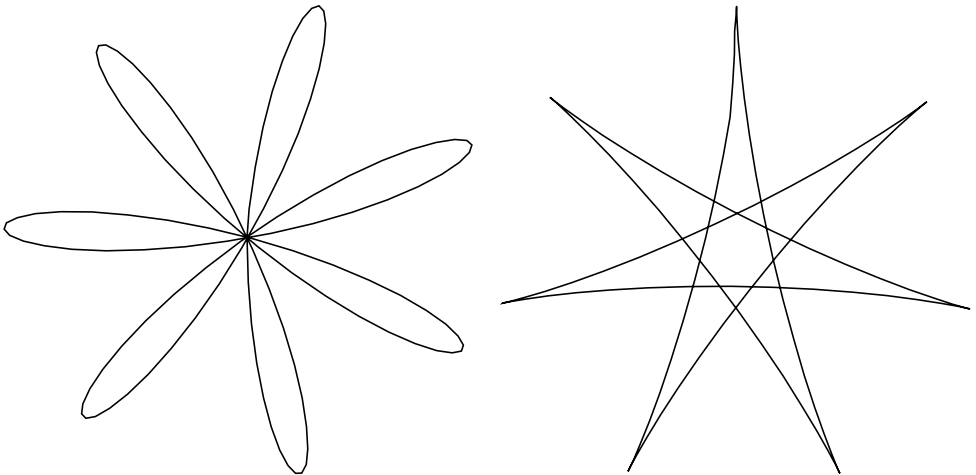
u mechanických záznějí rozdílů obou frekvencí,

$$\delta f = f_+ - f_- = 2f_0 \frac{\omega r}{c} = \frac{4\omega S}{\lambda_0 P}, \quad (24)$$

kde $\lambda_0 = c/f_0$, $S = \pi r^2$ je plocha prstence a $P = 2\pi r$ jeho obvod. Tedy měřením rozdílů frekvence dvou paprsků sledujících odlišné dráhy jsme dnes schopni určit nejjemnější změny rotace našeho světa.

Úloha IV. S ... Foucaultovo kyvadlo a rotace Země

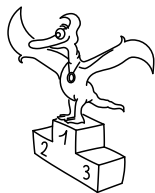
- a) Foucaultovo kyvadlo do písku nakreslilo při dvou různých demonstracích dva odlišné obrazce, oba jsou na obrázku. Rozhodněte, co způsobilo jiný tvar a také jak dlouhé by muselo být kyvadlo, aby tyto obrazce mohly na podlaze pařížské katedrály vzniknout. Kolikacípé jsou hvězdy/květy ve skutečnosti?



- b) Jaký tvar bude mít hladina v kbelíku s vodou, který klidně stojí na rovném stole?
 c) Ukažte, že vztah

$$\delta f = f_+ - f_- = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}}{P}$$

pro frekvenční rozdíl (frekvenci rázů) dvou protiběžných paprsků v laserovém gyroskopu platí pro jeho libovolný rovinný tvar – tedy nejen kruhový.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	5	8	5	32	100	65
1. Pavel Malý	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	3	–	4	4	–	–	3	14	68	28
2. Lukáš Labor	G, Třinec	–	3	4	2	2	4	2	17	54	27
3. Mária Kieferová	G Sv. Františka, Žilina	2	3	–	–	3	4	–	12	71	24
4. Karel Kolář	G, Špitálská, Praha	2	2	4	2	–	–	–	10	58	19
5.–6. Hana Šustková	G, Trutnov	2	3	1	2	2	–	–	10	39	18
Tereza Zábojníková	G, Uherské Hradiště	1	3	1	–	3	4	1	13	43	18
7. Jana Figulová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	–	–	1	3	–	10	53	16
8. Lukáš Cimpl	G, Frenštát pod Radhoštěm	3	3	0	–	3	–	–	9	64	14
9.–10. Alžběta Pechová	SPŠ strojnická, Vsetín	–	–	–	–	3	3	–	6	46	13
Prabhat Rao Pinnaka		–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
11. Michael Hahl	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	2	–	–	–	–	2	63	12
12.–13. Jan Humplík	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
Martin Polačko	G, Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
14. Václav Obrázek	G Jana Keplera, Praha	–	3	–	–	–	–	–	3	70	7
15. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	2	–	–	2	63	5
16.–17. Eva Hašková	G a SOŠ, Úpice	–	–	1	–	1	–	–	2	25	4
Petr Motloch	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	4	–	–	4	80	4
18.–19. Dana Suhomelová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
Martina Vaváčková	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
20. Peter Vanya	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	17	1

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	5	8	5	32	100	65
1. Barbora Drozdová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	2	–	1	3	–	12	54	25
2. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	3	–	–	1	–	–	5	50	13
3. Anna Chejnovská	G B. Němcové, Hradec Králov	2	3	–	–	1	–	–	6	50	11
4. Ondřej Maslíkiewicz	SPŠ, Hronov	1	3	0	2	–	–	–	6	40	10
5. Jiří Nárožný	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	86	6
6. Tomáš Pikálek	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
7. Barbora Janů	G Jana Keplera, Praha	2	–	–	–	1	–	–	3	38	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	5	8	5	32	100	65
1. <i>Miroslav Rapčák</i>	G, Orlová	2	3	0	2	5	6	4	22	62	40
2. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	3	–	3	5	5	–	19	64	36
3. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	3	2	–	–	–	6	3	14	73	32
4. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Orteny, Kutná Hora	2	3	1	2	3	6	–	17	46	26
5.–6. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	3	–	–	4	5	–	14	61	23
<i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	3	–	–	5	–	–	8	74	23
7. <i>Jana Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	3	–	–	2	–	–	7	70	21
8. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	58	19
9.–10. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	1	3	–	2	–	–	2	8	47	16
<i>Lada Peksová</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	2	3	–	2	–	–	–	7	64	16
11. <i>Petra Kňazeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	3	–	–	1	3	–	9	45	14
12.–13. <i>Jan Hodic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	0	2	2	–	–	4	31	10
<i>Viktor Jamrich</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	3	–	3	63	10
14. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	1	3	–	3	2	–	–	9	60	9
15.–16. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	3	–	1	–	–	–	4	57	8
<i>Stanislav Paláček</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	1	–	–	–	1	53	8
17.–18. <i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	1	1	1	1	–	–	–	4	21	6
<i>Michal Müller</i>	G, Jevíčko	–	–	–	2	–	–	–	2	55	6
19. <i>Jan Nevorál</i>	G, Jana Masaryka, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
20. <i>Martin Chudjak</i>	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
21.–22. <i>Vojtěch Dziejewicki</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Jiří Keresteš</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	4	4	5	8	5	32	100	65
1. <i>Peter Kosec</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	3	4	–	4	3	–	14	67	30
2. <i>Patrik Švančara</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	4	–	4	3	–	11	63	29
3. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	3	3	2	3	1	–	12	44	25
4. <i>Ondřej Beneš</i>	SPŠ, Hronov	3	1	–	–	1	–	–	5	57	8
5.–7. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	3	3	–	–	–	–	–	6	100	6
<i>Adam Chlapečka</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	86	6
<i>Tomáš Trégnier</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	1	0	0	1	1	–	3	19	6
8.–9. <i>Martina Štarhová</i>	G, Šumperk	–	2	–	–	1	–	–	3	45	5
<i>Markéta Švecová</i>	G, Havlíčkův Brod	1	–	–	1	–	–	–	2	50	5

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.