

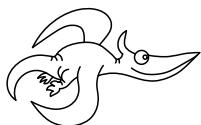
Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou autorská řešení první série úloh společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmkoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovatelů líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou.

Vaši organizátoři



Zadání III. série



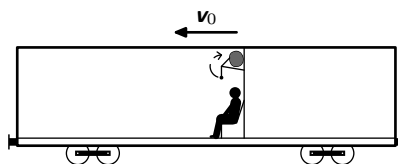
Termín odeslání: 25. ledna 2009

Úloha III.1 ... *tlačnice*

Organizátoři si z podzimního soustředění odvezli tlakovou nádobu s vodíkem a na vánoční besídce chtějí udělat pokus. Všechny plyn z ní vypustí do lehkého balonu – tj. bude mít atmosférický tlak. Dokáže takovýto balon uzvednout prázdnou tlakovou nádobu, když víte, že teplota zůstává konstantní?

Úloha III.2 ... *trainstopping*

Honza jede domů vlakem rychlostí v_0 . Z poličky na zavazadla mu z batohu visí olovnice. Najednou vlak začne brzdit (zrychlením a po dobu t), protože na železniční přejezd před ním vjel neopatrný řidič. A Honzu napadne – mohla se olovnice s napnutým provázkem otočit o 180° ? Uvažte, že je olovnice pevně zavěšena na poličce.



Obr. 1. Honza ve vagonu

Úloha III.3 ... *zachraňte hélium*

Na pouti v Dolním Dvoře mají novou atrakci, héliem plněné mýdlové bubliny, které se téměř nehybně vznášejí ve vzduchu. Co je těžší? Hélium v bublině, nebo její stěna?

Úloha III.4 ... vánoční řetěz

Jakub se o přednášce nudil, z batohu si vytáhl řetízek, chytil jej na dvou místech mezi prsty a začal s ním točit úhlovou rychlostí ω jako na obrázku 2. Marek to uviděl a zeptal se Jakuba, jaký tvar má rotující řetízek. Co mu Jakub odpověděl, když zanedbal vliv tíhového pole?



Obr. 2

Úloha III.P ... titanový život

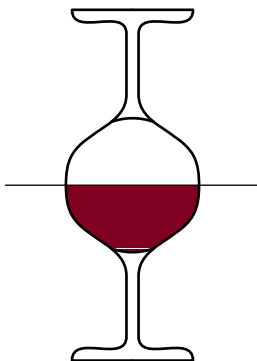
Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Radar na sondě Cassini obíhající Titan zjistil, že povrchové útvary rotují rychleji než měsíc sám (asi o 0,36° rok⁻¹). Vědecké zdůvodnění zní, že působením větru se mění rotace ledové vrstvy, která plave na podzemním oceánu. O rotaci měsíce se předpokládá, že je synchronizována s oběhem Titanu kolem Saturnu.

Další indicii podzemního oceánu poslala sonda Huygens, která po oddělení od Cassini přistála na povrchu Titanu. Během klesání atmosférou naměřila relativně silné radiové elektromagnetické vlny o frekvenci asi 36 Hz. K odrazu a zesílení radiových vln může dojít na vodivém prostředí, jako je právě rozhraní vody a ledu pod povrchem.

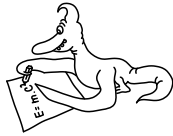
Poradte expertům NASA, jakými metodami by mohla současná nebo budoucí sonda k Titanu potvrdit nebo vyvrátit existenci podzemního oceánu.

Úloha III.E ... ve víně je pravda

Vyzkoušejte si následující pokus. Naplňte až po okraj stejné sklenice vína a vody. Na tu s vodou položte list papíru, sklenici otočte a položte na sklenici s vínem tak, aby jejich okraje lícovaly (konečný stav vidíte na obrázku). Teď, když opatrně vytáhnete papír tak, aby v kruhu vytyčeném okrajem sklenic vznikla malá mezírka, dojde k zajímavému jevu. Obsahy sklenic se vymění, aniž by se smísily (pokus trvá poměrně dlouho, buďte trpěliví). Zkuste se zamyslet proč, ale hlavně úkaz pořádně prozkoumejte. Zjistěte, jak závisí doba výměny na ploše mezírky, koncentraci alkoholu a jiných parametrech podle vašeho uvážení. Proběhne i pro jiné kapaliny? Například pouze obarvenou vodu, mléko, olej...



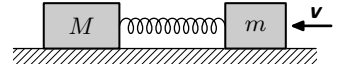
Obr. 3. Cabernet Sauvignon



Řešení I. série

Úloha I.1 ... klouzání a kmitání (4 body; průměr 1,69; řešilo 29 studentů)

Dvě závaží o hmotnostech m a M jsou spojena pružinou o tuhosti k a leží na hladké podložce (tření můžeme zanedbat). Tělesu m udělíme rychlost v (viz obrázek 4). Jaká bude nejkratší vzdálenost mezi tělesy a kdy jí dosáhnou?



Obr. 4

V ročenkách kanadské FO našel Honza Prachař.

Protože na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, bude se její hmotný střed pohybovat konstantní rychlostí a soustava s ním spojená je tedy inerciální. A protože v tomto vztažném systému kmitá soustava na místě, budeme problém řešit právě v ní.

Hmotný střed se pohybuje takovou rychlostí v' , že

$$(m + M)v' = mv, \quad v' = \frac{mv}{m + M}.$$

V této nové vztažné soustavě budou rychlosti obou těles

$$v'_m = v - v' = \frac{Mv}{m + M} \quad \text{a} \quad v'_M = v' = \frac{mv}{m + M}.$$

V okamžiku udělení rychlosti menšímu tělesu je potenciální energie soustavy nulová a kinetická maximální. V okamžiku, kdy budou k sobě tělesa nejbliže, bude naopak kinetická energie nulová a potenciální maximální.

Pro kinetickou energii soustavy na začátku máme

$$E_k = \frac{1}{2}mv'_m{}^2 + \frac{1}{2}Mv'_M{}^2 = \frac{1}{2} \frac{mMv^2}{m + M}.$$

Pokud je y_0 klidová délka pružiny a y_{\min} hledaná minimální, potom ze zachování energie plyne

$$E_k = \frac{1}{2}k(y_0 - y_{\min})^2, \\ y_{\min} = y_0 - v\sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}} = y_0 - v\sqrt{\frac{\mu}{k}},$$

kde $\mu = mM/(m + M)$ je tzv. redukovaná hmotnost. Ta nám umožní řešit druhou část úlohy jako problém jednoho tělesa.

Označme polohy hmotných středů obou těles v těžištové soustavě x_m a x_M . Tedy $mx_m = Mx_M$. Síla působící na těleso je úměrná protažení pružiny $F = k(x_m + x_M)$. Z druhého Newtonova zákona máme

$$m\ddot{x}_m = -k(x_m + x_M) = -kx_m \left(1 + \frac{m}{M}\right), \\ \mu\ddot{x}_m = -kx_m,$$

což je rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru. Námi hledaný čas je zřejmě čtvrtina periody jeho kmitu, tedy

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}.$$

Jan Hermann

honzah@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... pirát a zlatá odměna (3 body; průměr 2,78; řešilo 49 studentů)

Jeden pirát má za odměnu dostat pytel zlaťáků. Ale kapitán lodi je lakomý a chce mu to zkomplikovat. Přetavili zlato do válce. A k tomu ještě odlili druhý, velikostně stejný válec z mosazi. Protože uprostřed zlatého je vzduch, váží oba stejně a jsou stejně velké. Jak si má dotyčný pirát vybrat, aby pak nelitoval? Úlohu vymyslel kolega Mírka Beláňe.

Pirát dostal své dva válce na lodi, kde nemá žádné přístroje, jinak by mohl zkusit válce rozříznout a zjistit, který je dutý, nebo je zkusit roztavit v peci. Tedy stojí před dvěma válci s holýma rukama a na první pohled nevidí, který by mohl být ten zlatý. Proberme postupně, jaké má možnosti.

Dále pirát může srovnávat měrné tepelné kapacity obou kovů (pro zlato je dle tabulek $0,129 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a pro mosaz $0,38 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Zkusí nechat válce stát na sluníčku a může si všimnout, že ten zlatý se zahřeje rychleji (a tedy více) než ten mosazný.

Druhá možnost využívá různé tvrdosti materiálů (podle Mohsovy stupnice tvrdosti má zlato tvrdost 2,5 a mosaz mezi 3,5 a 4). Může použít nějaký materiál, který se nachází mezi těmito dvěma, jako třeba měď. Nicméně do zlatého válce půjde dokonce rýpat nehty. (Pokud ovšem nejsou oba válce např. galvanicky pokoveny.)

Třetí způsob odlišení obou kovů spočívá v rozdílném momentu setrvačnosti válců. Budeme předpokládat, že vzduchová bublina ve zlatém válci má rovněž tvar válce. Dutý válec má pak nutně větší moment setrvačnosti nežli ten plný. Tedy zlatý válec získá menší rychlost při puštění z nakloněné roviny nežli mosazný.

Zná-li pirát základy chemie, může použít nějakou chemikálii, která reaguje jinak se zlatem a jinak s mosazí. Příkladem takové budiž kyselina chlorovodíková HCl, která se zlatem vůbec nereaguje.

Po vyzkoušení všech těchto metod by jako správný pirát-fyzik již jistě věděl, který z válců (pokud by měl ještě oba) je zlatý a který mosazný.

Adéla Skoková

mafija@centrum.cz

Úloha I.3 ... už mě nehoupej (4 body; průměr 1,10; řešilo 21 studentů)

Kačenka se rozhoupává na houpačce následujícím způsobem. Při největší výchylce houpačky se příkrčí, a když je houpačka v nejnižším bodě, opět se postaví. Tyto pohyby neustále opakuje. Poměr vzdálenosti těžiště Kačenky od osy otáčení při pokrčení a při stání je $\sqrt[3]{2} \doteq 1,06$. Kolikrát se Kačenka zhoupne, než se amplituda houpání zdvojnásobí?

Z asijské olympiády přinesl Honza Prachař

Jak se bude Kačenka pohybovat? Ze zadání víme, že Kačenka začíná svůj pohyb v nejvyšší poloze, kde se příkrčí. Zhoupne se, v dolní úvratí se postaví a vychýlí se do nové, snad vyšší polohy. Nyní by bylo užitečné si uvědomit, co se zachovává v různých částech trajektorie.

Kačenku budeme považovat za hmotný bod ve vzdálenosti r od osy otáčení o . Při cestě Kačenky z nejvyšší polohy (tj. z bodu A do bodu B) se jistě bude zachovávat energie, jelikož

se Kačka ani nezvedá ani si nesedá. Označíme-li úhel původního vychýlení Kačky od svislé roviny ϑ_1 , můžeme napsat zákon zachování energie ve tvaru

$$mgr(1 - \cos \vartheta_1) = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

odkud můžeme vyjádřit v_1 jako

$$v_1 = \sqrt{2gr(1 - \cos \vartheta_1)}. \quad (1)$$

V dolní úvratí (mezi body B a C) ale již není možno použít zákon zachování energie, resp. bylo by to možné, ale musela by se započítat také práce vykonaná proti odstředivé síle. Naopak veškeré síly, kterými Kačka působí na houpačku, a taktéž i síly tíhové mají nyní nulový moment vzhledem k ose otáčení, proto platí zákon zachování momentu hybnosti. Můžeme tedy psát

$$v_1 r = v_2 r'. \quad (2)$$

Ve vzestupné části trajektorie (mezi C a D) Kačka nekoná žádnou práci, a proto bude platit analogicky k sestupné části

$$v_2 = \sqrt{2gr'(1 - \cos \vartheta_2)}, \quad (3)$$

a tak se Kačka odchýlí o úhel ϑ_2 . V krajní poloze (cesta z bodu D do E) se nemůže měnit výchylka, protože Kačka silově působí v ose závěsu.

Pokud se nám podaří nalézt vztah pro změnu výchylky během jednoho kyvu, neměl by být problém zjistit, po kolika zhoupnutích se zdvojnásobí počáteční výchylka. Dosazením z (1) a (3) do (2) dostáváme

$$\sqrt{2gr(1 - \cos \vartheta_1)} \cdot r = \sqrt{2gr'(1 - \cos \vartheta_2)} \cdot r'.$$

Nyní provedeme aproximaci $\cos x \approx 1 - x^2/2$, budeme tedy uvažovat menší výchylky. Aproximace je oprávněná, protože pro výchylku 45° je chyba menší než 5 %.

Jednoduchou úpravou se dostáváme k rovnici

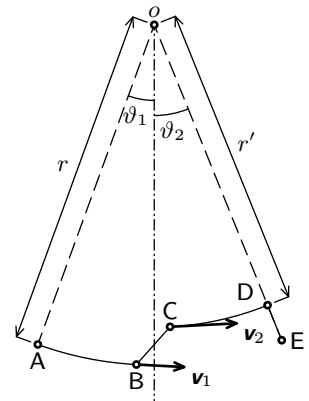
$$\vartheta_2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2} \vartheta_1.$$

My však víme, že $r/r' = \sqrt[3]{2}$, po dosazení vychází vztah

$$\vartheta_2 = \sqrt[8]{2} \vartheta_1,$$

a protože jde o geometrickou řadu, víme, že se po osmi zdvizích v dolní úvratí výchylka zdvojnásobí.

Kačenka tedy zdvojnásobí svou maximální výchylku po čtyřech periodách.



Obr. 5. Kaččino houpání

Lukáš Ledvina

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... praktická motoristická (4 body; průměr 1,00; řešilo 27 studentů)

Na nepřehledných křižovatkách či v ostrých zatáčkách někdy bývá vypuklé zrcadlo. Snadno si všimneme, že zrcadlo zkresluje jak vzdálenost, tak i rychlost přijíždějících aut. Naši vzdálenost od zrcadla označíme d , vzdálenost přijíždějícího auta od zrcadla L , jeho skutečnou rychlost v a poloměr křivosti zrcadla R . Na základě toho, co vidíme v zrcadle, určete, jak daleko se nám přijíždějící auto jeví? Jakou zdánlivou rychlostí se přibližuje? A jak se liší skutečná doba, za kterou přijíždějící auto vjede do křižovatky, od doby, kterou odhadneme z jeho zdánlivé vzdálenosti a zdánlivé rychlosti? Zvolte si rozumné hodnoty parametrů a rozhodněte, zda může být tento rozdíl dob nebezpečný. *Při cestě na soustředění zažil Marek Scholz.*

Pro začátek je důležité objasnit si, co je vlastně ona „zdánlivá vzdálenost“. Lidské oko je schopno rozlišit úhel, pod kterým dva různé body vidí. Máme-li představu o tom, jak je určitý předmět velký, jsme schopni odhadnout vzdálenost právě v závislosti na úhlu, pod kterým předmět vidíme. Mějme třeba nějakou tyč o délce l , na niž se díváme kolmo, a vidíme její konce pod úhlem δ . Její vzdálenost a pak určíme jako $a = 2l / \text{tg}(\delta/2)$. Užívající aproximace $\text{tg } x \approx \sin x \approx x$ (předpokládáme, že se jedná o malý úhel), dostáváme

$$a = \frac{l}{\delta}.$$

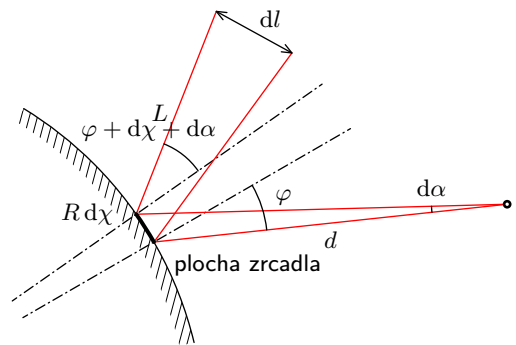
Budeme hledat řešení pro malé předměty, abychom mohli užívat uvedené aproximace $\sin x \approx x$ a zanedbat některá zkreslení obrazu v zrcadle, jež se pro větší objekty objeví a jež by mohla naše počty výrazně zkomplikovat.

Nyní bychom mohli zkoumat, pod jakým úhlem bude v určité vzdálenosti od zrcadla daný předmět vidět, hledáním takových paprsků, jež vycházejí z krajních bodů předmětu, odráží se od zrcadla a sbíhají se v místě pozorovatele. Takovýto přístup by však byl asi vcelku složitý a pracný. Podívejme se tedy na problém z druhého konce.

Mějme pozorovatele ve vzdálenosti d od zrcadla. Z tohoto bodu vypustíme pod velmi malým úhlem $d\alpha$ dva paprsky, jež dopadnou na určité místo na ploše zrcadla. Pak vyšetříme, jak se rozbíhají paprsky ve vzdálenosti L od zrcadla (tam, kde se nachází předmět), rozteč paprsků v tomto místě bude skutečnou velikostí předmětu. Je zřejmé, že tento přístup by měl dát stejný výsledek jako přístup opačný (ponecháme-li paprsky se odrážejí v obou směrech stejně).

Nechť tedy dopadá paprsek na zrcadlo a svírá s kolmicí roviny tečné k zrcadlu úhel φ . Druhý paprsek dopadá pod úhlem o $d\alpha$ větším, ale díky zakřivení zrcadla je tečná rovina zrcadla též pootočená o úhel $d\chi$. Druhý paprsek bude tudíž od prvního odchýlen navíc ještě o úhel $2d\chi$. (Dopadá-li paprsek na rovinné zrcadlo a zrcadlo pootočíme, odražený paprsek se vychýlí oproti původnímu odraženému paprsku o dvojnásobek úhlu pootočení zrcadla. Kdo nevěří, sám jistě ověří. Vyplývá to ze zákona odrazu.)

Pootočení imaginárního tečného rovinného zrcadla $d\chi$ určíme ze sinové věty. Oblouk o délce $Rd\chi$, na zrcadle ohraničený body odrazu paprsků, lze považovat za úsečku za předpokladu,



Obr. 6. Schéma situace

že $d\chi$ je dostatečně malý. Tato úsečka pak spolu se dvěma paprsky scházejícími se v bodě pozorovatele tvoří trojúhelník; jelikož jsou úhly $d\chi$ a $d\alpha$ vůči úhlu φ zanedbatelné, dostáváme vztah

$$\frac{R d\chi}{\sin d\alpha} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)},$$

z čehož po jednoduchých úpravách a s užitím $\sin d\alpha = d\alpha$ dostáváme hledané pootočení

$$d\chi = \frac{d}{R \cos \varphi} d\alpha.$$

Nyní již lze poměrně snadno určit rozteč paprsků v oblasti přijíždějícího předmětu. Při dopadu na zrcadlo mají paprsky rozteč $d \cdot d\alpha$, tato rozteč se těsně po dopadu zachovává. Po dopadu se však úhel rozbíhání paprsků změní z $d\alpha$ na $d\alpha + 2 d\chi$, tudíž rozteč paprsků dl (neboli skutečná velikost předmětu) v místě předmětu vzdáleného L od místa odrazu na zrcadle bude

$$dl = d d\alpha + L (d\alpha + 2 d\chi) = d\alpha \left(d + L + \frac{2Ld}{R \cos \varphi} \right).$$

Zdánlivou vzdálenost, jak jsme ji na počátku zavedli (zde ji označme třeba z), určíme jako

$$z_{\parallel} = \frac{dl}{d\alpha} = d + L + \frac{2Ld}{R \cos \varphi}.$$

Nyní však ještě hotovi nejsme – všimněme si, že doposud jsme uvažovali pouze zvětšení v „radiálním“ směru, tj. paprsek jsme vychylovali pouze v rovině určené pozorovatelem, předmětem a středem křivosti zrcadla. Jelikož se však obraz promítá na naši sítnici (a na zrcadlo) dvourozměrně, je třeba ještě vyšetřit, jak se mění obraz ve směru kolmém.

Postupujme tedy podobně jako doposud – z místa pozorovatele vyšleme dva paprsky pod velmi malým úhlem $d\beta$, ovšem v „tečném“ směru – rovina daná těmito paprsky je kolmá na rovinu procházející středem křivosti zrcadla. Paprsky nechtě opět svírají s kolmicí zrcadlové plochy, na niž dopadají, nějaký úhel φ . Ty vytínají na zrcadle oblouček o délce $d d\beta$ – v tomto případě totiž dopadají na zrcadlo kolmo, resp. pod velmi malým úhlem $d\beta$, pohybuje-li se pouze v rovině, v níž oba dopadající paprsky leží. Jelikož poloměr křivosti zrcadlové plochy je R , poloměr křivosti řezu plochy touto rovinou je $R \cos \varphi$. Pro délku oblouku tedy platí rovnost

$$d d\beta = R \cos \varphi d\psi,$$

kde $d\psi$ zde značí pootočení řezu zrcadlové plochy mezi body dopadu obou paprsků.

Analogicky k výše uvedenému postupu dostáváme úhel, pod nímž vylétávají odražené paprsky $d\beta + 2 d\psi$, pro rozteč dm paprsků ve vzdálenosti $L \cos \varphi$ (což je vzdálenost předmětu v promítání na rovinu dopadajících paprsků) dostáváme

$$dm = d d\beta + \left(d\beta + 2 \frac{d d\beta}{R \cos \varphi} \right) L \cos \varphi.$$

Již nyní je vidět, že v každém směru zrcadlo „zmenšuje jinak“; kdybychom se řídili podle tohoto zdánlivého „radiálního“ rozměru, pro zdánlivou vzdálenost dostáváme

$$z_{\perp} = \frac{dm}{d\beta} = d + L \left(\cos \varphi + \frac{2d}{R} \right).$$

Řekněme tedy, že si pozorovatel vybere pro posuzování vzdálenosti jeden z rozměrů, například ten rovnoběžný s rovinou danou jím, středem zrcadla a předmětem. Pokud se automobil pohybuje přímo k zrcadlu stálou rychlostí $v = dL/dt$, zdánlivá rychlost je¹

$$v' = \frac{\partial z}{\partial L} v = \left(1 + \frac{2d}{R \cos \varphi}\right) v.$$

Je zřejmé, že čas, který přijíždějící automobil bude potřebovat, aby dojel k zrcadlu (tj. L/v), bude stejný jako čas téhož odhadnutý z obrazu v zrcadle, poněvadž zvětšení obrazu je v případě $\varphi = \text{konst.}$ taktéž konstantní.

Ke zkeslení časového odhadu by mohlo dojít, kdyby se přijíždějící automobil nacházel již poměrně blízko – bylo by třeba počítat i se změnou úhlu φ , neboť ve skutečnosti by nejel automobil přímo k zrcadlu, ale o určitou vzdálenost by jej míjel. Pokud tedy automobil není zřejmě hodně daleko, není rozumné vstupovat mu bezhlavě do cesty.

V došlých řešeních bylo drtivou většinou použito zobrazovací rovnice ze středoškolských tabulek. Takováto rovnice však vychází z paraxiální aproximace (z lat. *par axi* – blízký ose; tzn. že střed křivosti zrcadla, pozorovatel a předmět leží v blízkosti jedné přímky – osy), což je však v rozporu s tím, k čemu jsou většinou dopravní zrcadla používána: k vidění „za roh“. Tento postup odpovídá výše uvedenému, stanovíme-li $\varphi = 0$. Většina řešitelů pak došla k *obrazové vzdálenosti*, jež ovšem *není* sama o sobě zdánlivou vzdáleností, jak ji vnímá pozorovatel. Obraz je totiž zmenšený, což je potřeba vzít taktéž v úvahu.

Marek Nečada

marekn@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. P ... Mikuláš vs. Klaudius (4 body; průměr 2,43; řešilo 23 studentů)

Rok 2009 je vyhlášen jako Mezinárodní rok astronomie a připomíná 400 let používání dalekohledů lidstvem. Vraťme se o čtyři staletí zpět, kdy byl dalekohled již k dispozici, ale klasická fyzika ještě v plenkách. V otázce uspořádání světa spolu soupeřily Koperníkův heliocentrický názor a Ptolemaiov geocentrický systém. Navrhněte experiment, resp. pozorování, které mezi oběma představami dokáže rozhodnout. Dostatečně okomentujte, jaký výsledek lze očekávat a co z něj plyne v prospěch či neprospěch uvažovaných uspořádání. Vlastní pozorování není nutné, i když vhodné. Navíc vysvětlete, proč jsou v geocentrickém modelu Slunce a Země spojeny úsečkou? Významný důkaz chtěl připomenout Pavel Brom.

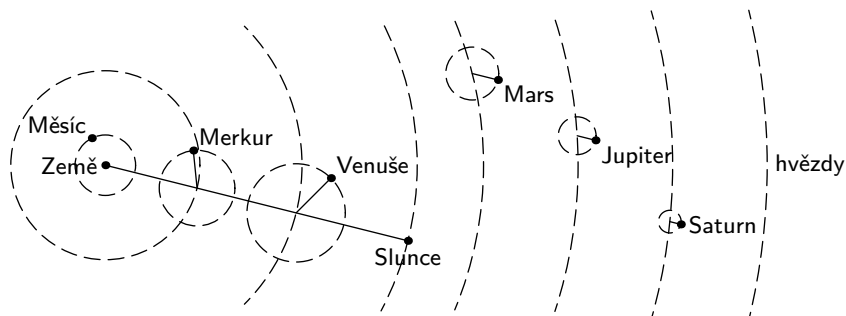
Klaudios Ptolemaios ve svých pracích o astronomii navrhl jednoduchý a z jeho pohledu funkční geocentrický model uspořádání nebeských těles. Vzhledem k tomu, že neměl k dispozici dalekohled, musel se spolehnout na to, co vidí očima, a na svojí intuici. Model, který navrhl, odpovídal veškerým tehdejším pozorováním. Uveďme tedy hlavní důvody hovořící ve prospěch geocentrického modelu:

- necítíme žádný pohyb Země, žádné cukání, Země je v klidu,
- vše padá na Zemi, resp. podle Aristotelova učení do středu světa, kde se Země již dlouho nachází,
- hvězdy se na nočním nebi jeví býti stálými,
- Venuše vypadala na nočním nebi přibližně stejně jasná, je tedy přibližně stejně daleko.

¹⁾ Výraz $\partial z/\partial L$ je tzv. *parciální derivace*, což znamená, že funkci $z(L, \varphi)$ derivujeme pouze dle proměnné L ; φ přitom považujeme za konstantu.

Ptolemaios dal tyto úvahy dohromady a vyslovil dva předpoklady. První, že všechna nebeská tělesa se pohybují po kružnici, a druhý, že ve společném středu takových kružnic je Země.

Bohužel jakkoliv je tento model elegantní, bylo třeba jej neuvěřitelným způsobem zpřesňovat. Velké kružnice, po kterých měly planety obíhat, byly nazvány deferenty. Po deferentech se pohybovaly středy malých kružnic, epicyklů, po kterých planety měly obíhat „ve skutečnosti“. Epicykly se zavedly hlavně pro vysvětlení nepravidelností v pohybu planet po nebeské sféře, jako je retrográdní pohyb ve smyčkách „tam a zpět“ po obloze, nicméně zde geocentrický model začal pokulhávat. Chybělo fyzikální vysvětlení pohybu planet.



Obr. 7. Představa geocentrického systému

Mikuláš Koperník přišel s jednoduchou myšlenkou, která by se zbavila nepříjemné spojnice Země–Slunce, a dále s tím, že Země je jednou z planet obíhajících Slunce. Když vzal v úvahu své výpočty, vyšlo mu, že není možné, aby fungoval jiný než heliocentrický model sluneční soustavy. Vyplýval z něj i retrográdní pohyb a zdánlivý pohyb hvězd vůči stálícím, dnes nazvaný paralaxa. Mimo jiné došel k závěru, že planety, které jsou ke Slunci blíže než Země, musí nutně jevit fáze. A jak je možné, že je Venuše neustále přibližně stejně jasná? Změny ve vzdálenosti, a tedy i jasnosti jsou kompenzovány právě zmíněnými fázemi a změnami zdánlivého průměru kotoučku planety.

Zmíněné důsledky heliocentrického modelu tedy musí být experimentálně pozorovatelné.

Fáze Venuše

K pozorování fází Venuše byl třeba dalekohled. Prvním, kdo fáze pozoroval, byl Galileo Galilei v roce 1610. Co můžeme z fází Venuše vyčíst? Nov pozorujeme, když Venuše prochází mezi Zemí a Sluncem, úplněk nastane, když je schovaná za Sluncem, a poloviční fáze nastanou ve chvíli, kdy je od Slunce na obloze nejvíce vzdálená, tedy je v největší elongaci (východní nebo západní).

Nakreslete a rozmyslete si, že v Ptolemaiově systému nikdy nemůže nastat úplněk či jiná fáze, kdy je Venuše osvětlena více jak z poloviny! Tyto fáze však Galilei pozoroval a došel k závěru, že geocentrický systém nemůže být správný.

Galileo sám si uvědomil význam svého pozorování fází Venuše včetně všech důsledků (vztahovaných k jeho době). Také proto oznámil tento objev jiným vzdělcům raději zašifrovaně – ve formě tzv. anagramu, tedy přesmyčky:

Haec immatura a me iam frustra leguntur – oy,

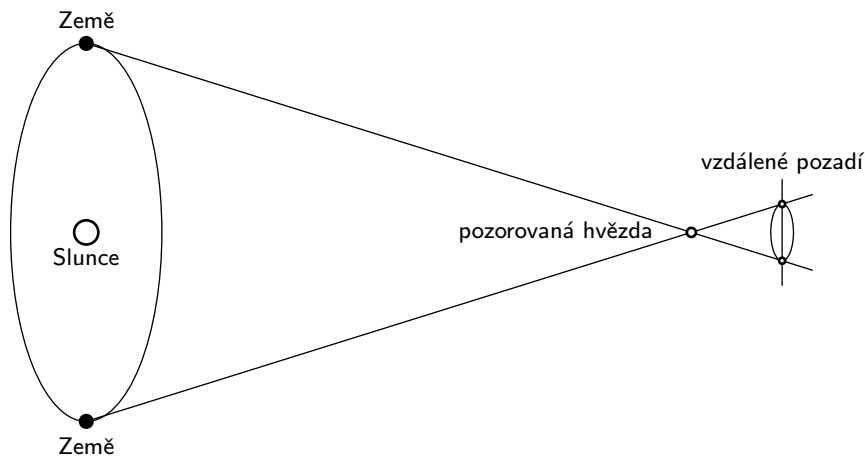
tedy doslova „Aj, toto nezralé ode mě již marně bylo čteno“, tzn. volně přeloženo např. „Toto jsem již zkusil, a to rychle bez rozmyšlení, tedy bez výsledku – ach“. Kepler brzy požádal Galilea o vysvětlení a ten odpověděl, že po správném přeskupení písmen dostaneme:

Cynthiae figuras aemulatur mater amorum,

což lze přeložit (čteno odzadu) „Matka lásek emuluje tvary Cynthie“ (tj. bohyně Měsíce ve starém Řecku), tedy „Venuše napodobuje fáze Měsíce“, odkud už jasně plynulo, že planeta Venuše musí obíhat kolem Slunce.

Paralaxa

Paralaxa je definována jakožto úhel svíraný dvěma přímkami vedenými z dvou různých míst v prostoru k jednomu pozorovanému bodu. Můžeme tedy říct, že jde o zdánlivý rozdíl polohy onoho bodu při pozorování ze dvou různých míst v prostoru. Čím je pak pozorovaný bod dál, tím je paralaxa menší a to byl také kámen úrazu pro brzká pozorování nebeské sféry. Paralaxa hvězd je totiž tak malá, že ji astronomové nebyli schopni zaznamenat až do devatenáctého století. Z geometrického pohledu na heliocentrický systém je existence paralaxy jasná, stejně jako je jasné, že se vzhledem k velkým vzdálenostem musí jako základna pro trojúhelník vzít průměr oběžné dráhy Země (roční paralaxa). První měření paralaxy uskutečnil v roce 1837 Wilhelm Struve. Ten určil paralaxu Vegy (α Lyr), $0,125''$ s chybou $0,055''$ (což se mu zdálo moc, a tak svým měřením nevěřil). Několik málo let po něm uskutečnili podobná měření i Friedrich Bessel (s objektem 61 Cyg) a Thomas Henderson, který shodou náhod změřil největší možnou pozorovatelnou paralaxu, tedy paralaxu naší druhé nejbližší hvězdy, Proxima Centauri. Sice mluvíme o největší paralaxe, nicméně její hodnota je $0,741''$. To skutečně nikdo z renesančních astronomů pozorovat nemohl.



Obr. 8. Paralaxa

Aberace

Aberace byla objevena jaksi náhodou v roce 1725 Jamesem Bradleyem při hledání paralaxy. Spíše než o geometrický důsledek se jedná o důsledek konečné rychlosti světla a pohybu Země kolem Slunce, což astronomové, resp. geometři předvídat nemohli. Stejně jako paralaxa

způsobuje zdánlivý pohyb hvězd, ale vzhledem k rychlosti pohybu Země (asi 30 km/s) a konečné rychlosti světla maximální aberace je 20,4955". A to je rozhodně lépe měřitelné než paralaxa. Díky důkazu, že Země se okolo Slunce pohybuje, můžeme mluvit o dalším z důkazů heliocentrismu.

A nakonec spojnice Země–Slunce, na níž leží středy epicyklů Merkuru a Venuše, byla nutná jako jakási korekce pozorování. Už Ptolemaios si totiž všiml, že obě zmíněné planety se ukazují vždy blízko Slunce, od něhož se nemohou vzdálit více, než je jistý maximální úhel, tzv. maximální elongace pro danou planetu. (Jsou tedy pozorovatelné jenom ráno jako jitřenky nebo večer jako večernice.)

Jana Poledniková

janap@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. E ... copak nám to tady smrdí?

Změřte rozdíl hustot čerstvého a zkaženého vejce a zjistěte i její časovou závislost! Pokuste se také vysvětlit své výsledky a zvažte užití statistického zpracování.

Tip: Vejce se rychle zkazí například na sluníčku.

Na zajímavou vlastnost upozornil Kája Tůma. Pokud potřebujete zkažené vejce, napište mu.

Teorie

Při snášce se sníží teplota vejce asi o dvacet stupňů, takže objemovou kontrakcí vody se uvnitř vytvoří podtlak a vejce nasaje vzduch. Vzniklá vzduchová bublina se časem zvětšuje, protože se vypařují plyny (vodní pára, oxid uhličitý). Plyny unikají pórovými kanálky, jichž se ve skořápce nachází na 10 tisíc, ale kapaliny jimi neproniknou. Změny teploty a vlhkosti neovlivňují pevnou skořápku; objem vejce se zachovává. Nepropustnost skořápky pro kapalnou vodu dovoluje měřit objem ponořením do vody, protože si můžeme být jisti, že nevnikne do vejce, a nezmění tak měřenou hustotu. Povrch vejce a pórové kanálky pokrývá vrstvička lipidů a bílkovin – kutikula, která částečně chrání vejce před mikroorganismy. Umytí vejce, které kutikulu setře, zvyšuje kazivost a vypařování vody (viz tabulka). Proto se vejce někde po umytí olejují.

Zvyšování hmotnostního rozdílu oproti čerstvému vejci:

Úprava povrchu snižuje změnu hmotnosti až dvojnásobně, stejně jako teplota a vzdušná vlhkost. Podle W. J. Stadelmana: *Egg Science and Technology*.

| čas | 10 °C vysoká vlhkost | | 24 °C nízká vlhkost | |
|-----|----------------------|----------|---------------------|----------|
| | olej [g] | mytá [g] | olej [g] | mytá [g] |
| 2 h | 0,018 | 0,025 | 0,029 | 0,041 |
| 4 h | 0,032 | 0,048 | 0,060 | 0,085 |
| 6 h | 0,042 | 0,064 | 0,077 | 0,113 |
| 1 d | 0,107 | 0,172 | 0,197 | 0,328 |
| 2 d | 0,167 | 0,228 | 0,313 | 0,572 |
| 3 d | 0,212 | 0,374 | 0,411 | 0,795 |
| 4 d | 0,260 | 0,469 | 0,506 | 1,017 |
| 5 d | 0,309 | 0,575 | 0,604 | 1,256 |

V otázce vypařování vody odkazujeme na úlohu 14. III. 4 a také 16. VI. E, k níž podotýkáme, že měříme vajíčko a nikoliv chrastící krabičku, takže předpokládáme lineární závislost.

Ujasněme si ještě, že z nízké hustoty vejce obecně nelze dovozovat jeho zkaženost, stejně jako z faktu zkaženosti nevyplývá, jakou má hustotu. Pokud pravidelně měříme hustoty zkaženého a požitelného vejce, nemusíme pozorovat rozdíl přesahující nejistotu měření.

Nejistotu měření veličiny m značíme Δ_m , relativní nejistotu $\delta_m \equiv \Delta_m/m$. Průměrná hustota se vypočítá jako podíl hmotnosti a objemu $\varrho = \varrho(m, V)$. Uvažujme zcela přesné měření hmotnosti $\Delta_m = 0$; pak se nejistotu výsledné funkce odhadneme pomocí prvního diferenciálu

$$\Delta_\varrho = \frac{d\varrho(V)}{dV} \Delta_V,$$

tedy v okolí měření nahradíme funkci její tečnou. Analogicky postupujeme pro m . Zásadní tvrzení, které dovoluje vůbec odhadnout nejistotu funkce více proměnných, tvrdí, že nejistoty se sčítají kvadraticky. Pro součet dvou veličin jsou příslušné derivace jednotkové, takže $\Delta_{f(x,y)} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$. Pro podíl $\varrho = m/V$ z toho plyne

$$\delta_\varrho = \sqrt{\delta_V^2 + \delta_m^2}.$$

Obvykle má nejistota dvě části: chybu měřidla (tu u hmotnosti neuvažujeme) a chybu statistickou $\Delta_y^2 (n-1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, které se opět sčítají kvadraticky.

Měření

Měřili jsme nečištěná vejce Kaufland, z podniku živočišné výroby Ovus. Jedno vejce mělo od počátku měření puklinu, která se projevila na dvojnásobném výparu. Některá vejce obkružovaly „rýhy“ ztenčené skořápky.

Hmotnost jsme měřili na digitální váze s přesností 0,01 g, kterou vzhledem k statistické nejistotě a nejistotě objemu neuvažujeme. K měření objemu menších těles se používá zařízení zvané pyknometr; skládá se z dvou nádob zabroušených přesně tak, aby do sebe zapadly. Z vrchní nádoby při šroubování vytéká voda ocechovanou trubičkou. Pokud měříme hmotnost pyknometru nejprve jen s kapalinou známé hustoty a poté s měřeným tělesem, jednoduše vypočítáme objem s vysokou přesností. To však patří do říše divoké fantazie, protože se musíme spokojit s odměrným válcem přesnosti 1 ml.

Měřili jsme 10 vajec po dobu osmi dní v rozmezí teplot 16–24 °C (viz tabulka). Za veličinu vyjadřující úbytek hmotnosti jsme vybrali relativní úbytek $\mu \equiv 1 - m(t)/m(0)$, kterou ve smyslu výše uvedeného nezatěžuje žádná chyba.

Relativní úbytek hmotnosti a jeho nejistota v čase.

| t/d | $\mu(t)/10^{-3}$ | $\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$ | t/d | $\mu(t)/10^{-3}$ | $\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$ |
|-------|------------------|---------------------------|-------|------------------|---------------------------|
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 3,73 | 6,1 | 0,8 |
| 0,15 | 0,42 | 0,13 | 4,04 | 6,4 | 0,9 |
| 0,61 | 1,24 | 0,20 | 4,75 | 7,2 | 1,0 |
| 0,75 | 1,44 | 0,18 | 5,11 | 8,3 | 1,2 |
| 0,98 | 1,68 | 0,21 | 5,75 | 9,4 | 1,3 |
| 1,23 | 1,88 | 0,26 | 5,91 | 9,8 | 1,4 |
| 1,63 | 2,38 | 0,33 | 6,18 | 10,2 | 1,5 |
| 1,87 | 2,61 | 0,37 | 6,73 | 11,2 | 1,6 |
| 2,21 | 2,87 | 0,38 | 6,90 | 11,6 | 1,6 |
| 2,57 | 3,97 | 0,58 | 7,19 | 12,2 | 1,7 |
| 2,92 | 4,64 | 0,66 | 7,61 | 12,9 | 1,7 |
| 3,29 | 5,33 | 0,72 | 7,88 | 13,3 | 1,8 |

Lineární regrese

Za předpokladu, že v lineární závislosti $y = kx$ veličinu x_i měříme přesně a veličině y_i odpovídá rozptyl σ_i^2 , můžeme se domnívat, že součet odchylek

$$S(k) = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2$$

nabývá minimální hodnoty². Tím bychom přiznali všem výsledkům stejnou váhu, nicméně bychom samozřejmě chtěli, aby přesnější výsledky měly váhu větší, a proto zavedeme „přirozený“ váhový faktor $w_i = 1/\sigma_i^2$. Funkce

$$S(k) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - kx_i)^2$$

nabývá minima pro

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}$$

a rozptyl určíme podle vztahu

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}.$$

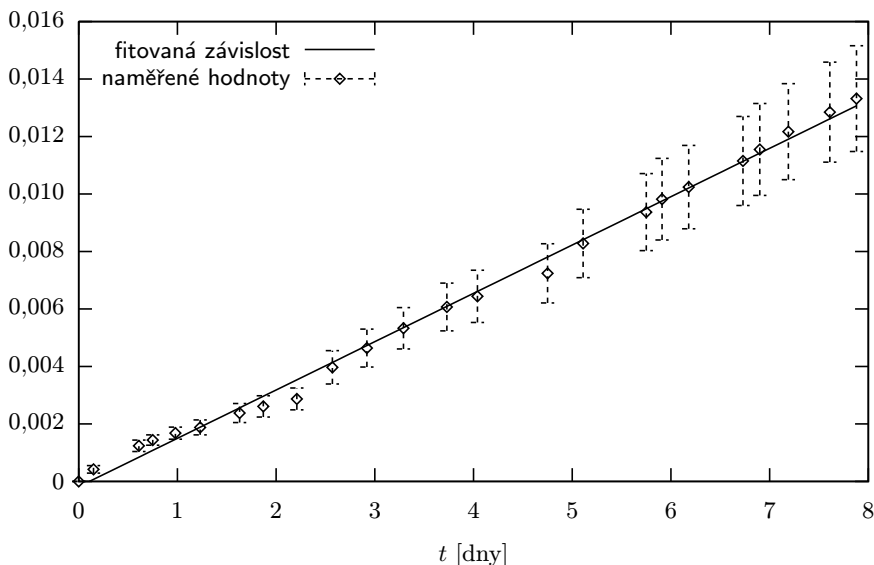
Tento postup také vysvětluje, proč tzv. linearizace grafu závislosti má pouze informativní hodnotu. Při prokládání přímkou podle oka přece neuvažujeme váhové faktory!

Dosazením získáme výsledek

$$k = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i t_i}{\Delta_{\mu_i}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\Delta_{\mu_i}^2}} \pm \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\Delta_{\mu_i}^2} \right)^{-1/2} \right) = (1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ d}^{-1}.$$

²⁾ Předkládaný postup má hlavně didaktický cíl. Míjíme podrobnosti, např. pokud bychom měřili nepřesně i x_i , počítali bychom vzdálenost bodu (x_i, y_i) a přímkou $y = kx$ pod úhlem daným nejistotami.

Z měření objemu pak snadno dopočítáme, že se hustota snížila z $\rho(0) = (1058 \pm 22) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ na $\rho(8 \text{ d}) = (1043 \pm 23) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, přičemž největší nejistota pochází z nepřesného měření objemu.



Obr. 9. Graf závislosti relativního úbytku hmotnosti na čase

Poznámky k došlým řešením

Podotýkáme, že narozdíl od řešitelů měřících jedno určité vejce, se tento výsledek vztahuje na „standardní vejce“. To také opravňuje opravování výsledků řešitelů: při stejných podmínkách (teplota a vlhkost) můžeme zahrnout nepřesná měření řešitelů, pokud se liší víc než krajní chybou $3\sigma_\rho$.

Autor děkuje panu Ing. L. Němcovi z KDF MFF UK za zapůjčení váhy.

Jakub Michálek
 jmi@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. S ... princip ekvivalence (6 bodů; průměr 2,15; řešilo 13 studentů)

- Jaké by musely nastat podmínky, aby Galileův pokus nevyšel? Šikmá věž v Pise je vysoká $h = 55 \text{ m}$, předpokládejte, že obě koule mají poloměr $R = 8 \text{ cm}$ a že jedna koule je vyrobená z olova o hustotě $\rho = 11300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jakou hustotu by musela mít druhá koule, aby rozdíl v časech dopadu obou koulí byl větší než $\Delta T = 0,3 \text{ s}$?
- S jakou přesností ověřuje původní Eötvösovo měření rovnosti poměru pro neutrony a protony, pokud ve dřevě tvoří neutrony 50 procent hmotnosti, zatímco v platině 60 procent hmotnosti? Zanedbejte hmotnost elektronů a vazebné energie.
- Ověřte užívaný předpoklad o tom, že v Budapešti je g'_s v porovnání s g zanedbatelné.

Zadali autoři seriálu.

Galileova chyba

Rozdílná doba dopadu je způsobena rozdílným odporem vzduchu, který působí na obě koule. Napíšeme-li si pohybovou rovnici koule, na kterou kromě gravitační síly působí ještě odporová síla prostředí daná klasickým Newtonovým vztahem, dostáváme

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}CS\rho_v v^2, \quad (4)$$

kde m značí hmotnost koule, v její rychlost, g gravitační zrychlení, C součinitel odporu, S plochu průřezu koule a ρ_v odpor prostředí (vzduchu).

Podělením hmotností a vyjádřením průřezu koule a jejího objemu pomocí poloměru koule R a její hustoty ρ dostáváme

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3C\rho_v v^2}{8R\rho}. \quad (5)$$

Máme v podstatě dvě možnosti, jak tuto rovnici řešit – jednou z nich je numerické řešení, které jsme měli možnost vyzkoušet si v minulém ročníku seriálu. Touto cestou se (až na jednu výjimku) ubírala všechna principiálně správná řešení. Ukažme si tedy druhou možnost.

Získanou diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných. Derivaci rychlosti podle času dv/dt chápeme jako „zlomek“, rovnici vhodně „upravíme“ na

$$\frac{dv}{g - \frac{3C\rho_v v^2}{8R\rho}} = dt \quad (6)$$

a nyní obě dvě strany integrujeme – levou podle rychlosti, pravou podle času, tedy tak, jak nám to naznačují diferenciály (členy dv a dt). Dostáváme

$$\frac{\operatorname{argtgh} \left(\sqrt{\frac{3C\rho_v v}{8gR\rho}} \right)}{\sqrt{\frac{3C\rho_v g}{8R\rho}}} = t. \quad (7)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit rychlost jako funkci času

$$v(t) = \sqrt{\frac{8gR\rho}{3C\rho_v}} \operatorname{tgh} \left(t \sqrt{\frac{3C\rho_v g}{8R\rho}} \right). \quad (8)$$

Integrací podle času dostáváme závislost polohy koule na čase

$$x(t) = \frac{8R\rho}{3C\rho_v} \ln \cosh \left(t \sqrt{\frac{3C\rho_v g}{8R\rho}} \right). \quad (9)$$

Zpětným přechodem pak dostáváme závislost času na poloze koule

$$t = \sqrt{\frac{8R\rho}{3C\rho_v g}} \operatorname{argcosh} \exp \left(\frac{3C\rho_v x}{8R\rho} \right). \quad (10)$$

Díky tomuto vzorci dokážeme určit, za jaký čas daná koule urazí vzdálenost x , což je přesně to, co při našem řešení potřebujeme. Protože nyní známe pro první kouli všechny konstanty

(jsou uvedeny v tabulce), můžeme vypočítat čas, za který dopadne první koule, prostým dosazením a dostáváme

$$t_1 = 3,356 \text{ s.}$$

Hodnoty konstant pro první kouli

| Označení | Hodnota | Poznámka |
|----------|--|----------------------|
| R | 0,08 m | poloměr koule |
| ρ | $11300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | hustota koule |
| C | 0,48 | součinitel odporu |
| ρ_v | $1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | hustota vzduchu |
| g | $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | gravitační zrychlení |
| x | 55 m | výška věže |

Aby mohl Galileo zaregistrovat požadovaný rozdíl v době pádu, musí druhá koule buď mít větší hustotu, a tedy padat rychleji, nebo menší hustotu a spadnout za delší dobu.

V případě, že bychom odpor vzduchu vůbec neuvažovali, spadlo by těleso volným pádem za čas

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 3,349 \text{ s.}$$

Proto není možné, aby Galileo zaregistroval nějaké těleso dříve než olovenou kouli, hledaná hodnota hustoty tedy bude nižší než $11300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. V našem případě můžeme buď všechno počítat ručně dosazováním různých hustot do vztahu (10), nebo můžeme využít sílu některého tabulkového kalkulátoru (např. Excelu či OpenCalcu). Napíšeme si výše uvedený výraz jako funkci parametru ρ a sledujeme chování výsledku v závislosti na zadané hustotě. Po několika málo odhadech zjistíme, že hledaná kritická hodnota hustoty, při které je rozdíl časů dopadů alespoň požadovaných 0,3 s, je rovna $296 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pohledem do tabulek zjišťujeme, že materiály s dostatečně malou hustotou jsou například balzové dřevo, korek či nepříliš namrzlý sníh. Galileo by tedy alespoň v principu mohl uspořádat experiment tak, aby byl schopen v čase dopadu obou koulí zaregistrovat rozdíl.

Eötvösovo měření

Pomocí horního indexu budeme rozlišovat, zdali se jedná o protony či neutrony, pomocí dolního, zdali se jedná o gravitační či inerciální hmotnost. Označme dále N_1 počet nukleonů v tělese ze dřeva a N_2 počet nukleonů v tělese z platiny.

Zanedbáváme-li hmotnosti elektronů a vazebné energie, pak jsou obě hmotnosti aditivní (tedy hmotnost dvou těles je rovna součtu hmotností obou) a naměřenou rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti obou těles můžeme zapsat jako

$$\frac{N_1(0,5m_g^p + 0,5m_g^n)}{N_1(0,5m_i^p + 0,5m_i^n)} - \frac{N_1(0,4m_g^p + 0,6m_g^n)}{N_1(0,4m_i^p + 0,6m_i^n)} = 0 \pm 10^{-9}. \quad (11)$$

První zlomek je poměr gravitační a setrvačné hmotnosti tělesa ze dřeva, využili jsme toho, že v tomto tělese je $0,5N_1$ protonů, a zmíněné aditivity obou hmotností. Tuto rovnost můžeme upravit na

$$\frac{m_g^p + m_g^n}{m_i^p + m_i^n} - \frac{2m_g^p + 3m_g^n}{2m_i^p + 3m_i^n} = 0 \pm 10^{-9},$$

$$\begin{aligned} \frac{(m_g^p + m_g^n)(2m_i^p + 3m_i^n) - (2m_g^p + 3m_g^n)(m_i^p + m_i^n)}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} &= 0 \pm 10^{-9}, \\ \frac{m_i^n m_g^p - m_i^p m_g^n}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} &= 0 \pm 10^{-9}, \\ \frac{m_i^n m_i^p}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} \left(\frac{m_g^p}{m_i^p} - \frac{m_g^n}{m_i^n} \right) &= 0 \pm 10^{-9}. \end{aligned} \quad (12)$$

Protože hmotnosti protonů a neutronů jsou v podstatě stejné, můžeme položit $m_i^p = m_i^n$. V tom případě je ale hodnota prvního zlomku na levé straně rovnice 1/10 a dostáváme

$$\left(\frac{m_g^p}{m_i^p} - \frac{m_g^n}{m_i^n} \right) = 0 \pm 10^{-8}. \quad (13)$$

Původní Eötvösovo měření tedy ověřuje rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti protonů a neutronů s přesností 10^{-8} , tedy o řád nižší. Pověšimněte si prosím, že tento odhad je založen na faktu, že hmotnosti protonů a neutronů jsou přibližně stejné. V případě, že by se výrazněji lišily, dostali bychom ještě hrubší odhad.

Výlet do Budapešti

Tečná složka gravitačního zrychlení je způsobena odstředivou silou rotace Země kolem své osy, úhlovou rychlost rotace Země kolem své osy označíme ω .

V označení z obrázku 10 je velikost odstředivého zrychlení rovna

$$g_o = \omega^2 r = \omega^2 R_Z \cos \alpha. \quad (14)$$

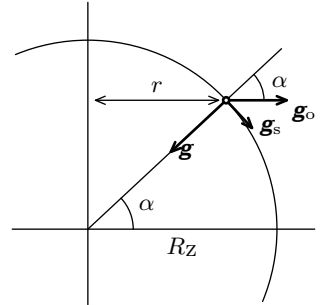
Nás zajímá složka kolmá ke směru gravitačního zrychlení, tedy

$$g'_s = g_o \sin \alpha = \omega^2 R_Z \cos \alpha \sin \alpha. \quad (15)$$

Dosadíme-li sem tabulkové hodnoty poloměru Země, její úhlové rychlosti a zeměpisnou šířku Budapešti $\alpha \approx 47^\circ$, dostáváme hodnotu

$$g'_s = 0,017 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

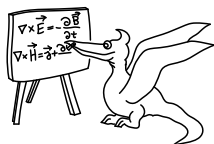
Kolmá složka tíhového zrychlení je tedy v Budapešti více než 500krát menší než složka normálová, což jsme chtěli ukázat.



Obr. 10. Gravitační a odstředivé zrychlení

Pavel Motloch

pavel@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Michelson a světlo

V této kapitole se zaměříme na pokusy, které mají co do činění se světlem – nejprve si povíme o způsobech, jakými se v minulosti měřila rychlost světla, a poté o pokusu Michelsonově, který byl předzvěstí revoluce jménem speciální teorie relativity.

$c = ???$

Světlo již od pradávna podněcovalo lidskou zvědavost, proto není žádný div, že se o něm ve starověkém Řecku vedly mnohé dispute. Pomineme-li povahu světla, která byla „pořádně“ objasněna až v polovině dvacátého století³, zaměstnávala starověké filosofy nejvíce rychlost. Je konečná, či nekonečná? Mnoho přispělo se svým názorem, ale prvním, kdo se rozhodl opravdu něco dělat, byl... ano, náš starý známý Galileo (nebojte, tohle je poslední zmínka o něm v našem seriálu). Postavil dva své pomocníky daleko od sebe, s lucernami zakrytými šátky. Jeden z nich náhle odkryl lucernu a druhý z nich učinil totéž, jen co k němu došlo světlo z první lucerny. První z experimentátorů přitom sledoval dobu, za kterou k němu dorazil světelný signál od druhého pomocníka. Asi nikoho nepřekvapí, že Galileo nenaměřil na vzdálenost necelých dvou kilometrů žádný pozorovatelný efekt – světlo z druhé lucerny dorazilo „okamžitě“. Galileo se však nedal svést negativním výsledkem a pouze prohlásil, že světlo se pohybuje minimálně desetkrát rychleji než zvuk.

Prvním, komu se podařilo více méně jednou provždy debatu o konečnosti rychlosti světla rozhodnout, byl dánský astronom Ole Christensen Rømer, který potřebná data získal měřením pohybu Jupiterova měsíce Io. Dokázal, že rychlost světla ve vakuu je konečná, a dokonce velmi dobře určil její hodnotu. Ve FYKOSe jsme se jeho výpočty už zaobírali – tvořily náplň úlohy 18. V. 4. Proto laskavého čtenáře odkazujeme do archivu na našich internetových stránkách, kde se o celé problematice dozví více.

Razantní posun v přesnosti naměřených hodnot přinesl britský astronom James Bradley, který objevil jev aberace světla. Vysvětleme si nyní trochu podrobněji, o co se vlastně jedná.

Bradley si představil chodce, který chodí do kolečka v hustém dešti padajícím kolmo k zemi. Ač déšť padá kolmo k zemi, našemu chodci se bude zdát, že mu protivný déšť padá stále šikmo do obličeje. V průběhu pohybu se mu tedy bude postupně zdát, že nejprve prší z jihu, pak z východu, ze severu a tak stále dokola. Přesvědčte se prosím, že jste si situaci dobře promysleli.

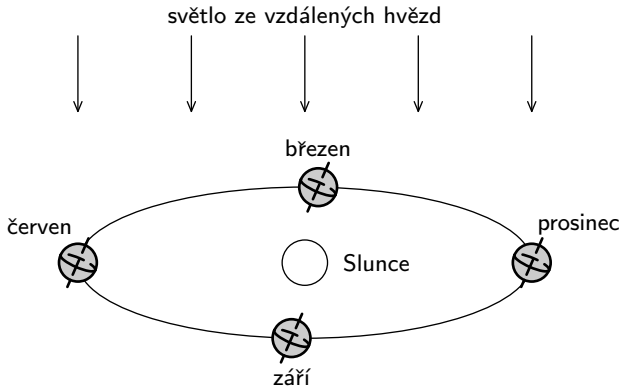
Bradley si uvědomil, že na světlo hvězd se můžeme dívat jako na takový déšť. Místo chodce vezmeme naši Zemi, místo jeho kolečka vezmeme dráhu, po které Země obíhá Slunce. Když potom sledujeme hvězdu, která je přímo na severu, bude se nám v průběhu roku zdát, že se hvězda na nebi pohybuje v kolečku (viz obrázek 11) – nejprve je trochu na jihu, pak trochu na východě, ... V případě deště je úhel, pod kterým se chodci jeví, že prší, roven přibližně

$$\vartheta \approx \frac{v_{\text{chodec}}}{v_{\text{déšť}}} . \quad (16)$$

³⁾ A nebyl by žádný div, kdyby se časem objevila nějaká „lepší“ teorie než ta, kterou máme k dispozici.

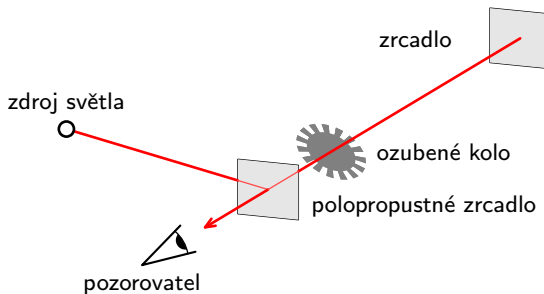
Analogicky je v případě Země toto úhlový poloměr kolečka, které hvězda na obloze opisuje. Bradley věděl, že světlo je asi 10 000krát rychlejší než Země na orbitě. Z toho vypočetl, že poloměr kruhu, který hvězda na obloze vykonává, by měl být řádově 20". Taková přesnost již byla v možnostech tehdejší astrometrie, Bradley tedy mohl navrhované měření uskutečnit a zjistit, že

$$c = (298\,000 \pm 300) \text{ km/s.}$$



Obr. 11. Aberace

Po více než sto let nikdo nevěděl, jakým lepším způsobem měření provést, až v roce 1849 přišel H. Fizeau, který vymyslel způsob, jak celé měření provést i bez pomoci hvězd. Jak se můžeme podívat na obrázku 12, vycházel ze základního uspořádání, které užíval již Galileo. Tím rozhodujícím rozdílem je zde rychle se otáčející ozubené kolo. Jeho zuby nepropouští světlo, a světelný paprsek tedy může projít pouze tehdy, když je kolo vhodně otočeno. Jinak narazí do zubu a zastaví se.



Obr. 12. Fizeauův experiment

Světlo do experimentu vstupuje přes polopropustné zrcadlo, na kterém se odráží, prochází ozubeným kolem, odráží se na vzdáleném zrcadlu, opět prochází ozubeným kolem a po průchodu polopropustným zrcadlem přichází k pozorovateli. Zatímco však světlo letí k zrcadlu a zpět, otočí se kolo o malý úhel

$$\alpha = \omega T = \omega \frac{2L}{c}, \quad (17)$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení kola.

Při špatně zvolené frekvenci otáčení se kolo otočí zrovna o tolik, že nazpět se vracející světlo narazí do zubu a neprojde. V takovém případě pozorovatel nic nevidí. Když ale frekvenci nastavíme vhodně, stihne se kolo otočit o právě jeden zub a pozorovatel zaregistruje blikání, respektive je-li rychlost otáčení dostatečně velká, stálé světlo. Je-li zubů právě N , odpovídá jednomu zubu úhel

$$\beta = \frac{2\pi}{N}. \quad (18)$$

Aby světlo prošlo, musí si být rovny úhly α a β . Odtud dostáváme srovnáním rovností (17) a (18) rychlost světla

$$c = \frac{L\omega N}{\pi}. \quad (19)$$

Fizeauovi se podařilo měření provádět na vzdálenost $L \approx 9$ km a jeho hodnota c byla o poznání nepřesnější než ta Bradleyho. Foucaultovi a posléze Michelsonovi se však podobnou metodou během následujících sedmdesáti let povedlo nejistotu měření snížit až na 4 m/s.

S rozvojem teorie elektromagnetismu se zjistilo, že rychlost světla souvisí s dalšími základními konstantami (permitivitou vakua ε , vystupující v Coulombově zákoně elektrostatiky, a permeabilitou vakua μ , vystupující například v Ampérově zákoně) dle vztahu

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (20)$$

Rychlost světla můžeme tedy určit prachspřstým změřením obou konstant na pravé straně rovnice a provedením příslušného výpočtu tak, jak to poprvé učinili Weber a Kohlrausch.

S rozvojem moderní techniky se z měření rychlosti světla stala rutinní záležitost. Moderní osciloskopy jsou schopny zachytit čas v nanosekundové škále, takže nic nebrání tomu, měřit vše nejjednodušším možným způsobem. Experimentátor změří dobu, za kterou světlo urazí známou vzdálenost, a pak vypočítá všem školákům známý poměr $c = s/t$.

Poslední měření rychlosti světla se uskutečnilo v roce 1983, kdy byl pomocí rychlosti světla definován metr jako „délka dráhy, kterou světlo urazí ve vakuu za dobu $1/299\,792\,458$ s“. Od té doby je rychlost světla ve vakuu určena naprosto přesně, pouze máme stále přesněji určeno, co je to vlastně jeden metr.

Michelson podruhé

Již zmíněný Albert Michelson se do historie fyziky zapsal nejen vylepšením původní Fizeauovy metody, ale především jiným experimentem, jemuž bude věnována druhá část této kapitoly.

V polovině devatenáctého století vedle sebe existovaly dvě významné fyzikální teorie – klasická mechanika a teorie elektromagnetismu. Obě dosahovaly pozoruhodných úspěchů při vysvětlování roztodivných přírodních jevů, problematické bylo, že nešly zkombinovat. Ukažme si proč.

Nejprve se zabýváme pohybem z hlediska klasické mechaniky. Když tryskové letadlo letící rychlostí 500 km/h vystřelí raketu rychlostí 500 km/h, bude se tato vůči pozorovateli na zemi pohybovat rychlostí 1000 km/h (od něj, v horším případě k němu). Selský rozum nám říká, že ta samá logika by měla platit i v případě světla, o němž již víme, že se šíří rychlostí zhruba 300 000 km/s. Když tedy zapneme světla auta jedoucího rychlostí 100 000 km/s, mělo by se lidem stojícím na zemi zdát, že se k nim světlo přibližuje rychlostí 400 000 km/s. To je ale spor s Maxwellovými rovnicemi, určujícími zákony elektromagnetismu. Podle nich totiž každý experimentátor, který se bude pokoušet měřit rychlost světla, naměří ve všech případech ve

vakuu tu samou hodnotu cca 300 000 km/s, nezávisle na jeho vlastní rychlosti. Pro erudovanější čtenáře poznamenejme, že problém spočívá v tom, že Maxwellovy rovnice nejsou invariantní vůči Galileiho transformaci. Když do Maxwellových rovnic dosadíme

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

dostaneme *jiné rovnice!* To se fyzikům pochopitelně nelíbilo, protože chtěli, aby tvar jejich rovnic nebyl závislý na vztažné soustavě, ve které jevy pozorujeme. Proto bylo třeba buď prohlásit, že jsou tyto rovnice obecně neplatné, anebo říci, že se elektromagnetismus řídí jinými principy než klasická mechanika.

Co teď s tím?

Lidé devatenáctého století se podívali na ostatní druhy vlnění – zvukové vlny, vlny na vodě, kmitání strun – a zjistili, že všechny potřebují ke svému šíření nějaké médium. Proto analogicky usuzovali, že i světlo se v nějakém prostředí šíří, a toto prostředí rovnou pojmenovali *éter*. Tvrdili, že vzhledem k éteru se světlo šíří rychlostí cca 300 000 km/s, ale vůči ostatním pozorovatelům se jeho rychlost řídí vektorovým součtem. Tedy tak, jak jsme si to v předchozím odstavci vysvětlovali na příkladu tryskového letadla, a tak, jak nám to ponouká náš selský rozum.

Tady se otevírá pole působnosti pro Michelsonův pokus. Země se pohybuje kolem Slunce rychlostí $v = 30$ km/s. Když bychom proto měřili rychlost světla v průběhu celého roku, měli bychom naměřit její kolísání, a to minimálně o uvedených 30 km/s.

Jak ale Michelson dovedl změřit takový malý rozdíl? Pomocí interference⁴. Jeho aparaturu vidíte na obrázku 13.

Ze zdroje světla vyletí svazek paprsků, které se na polopropustném zrcadle A rozdělí do dvou kolmých svazků. Ty se po odrazu na zrcadlech B, C vrací na polopropustné zrcadlo a po dalším odrazu směřují ke stínítku D. Zde oba svazky interferují a vytvářejí standardní interferenční obrazec.

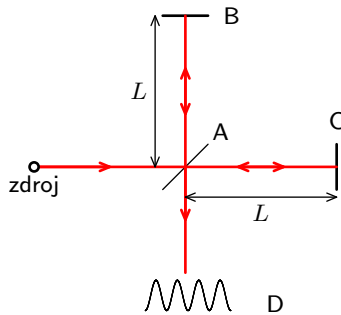
Podívejme se nyní, co by se stalo, kdyby se celá aparatura pohybovala vůči éteru rychlostí v směrem doprava (obr. 14). Nečárkovanými veličinami označujeme pozici prvků aparatury v okamžiku dělení svazku na desce A, čárkovanými veličinami označujeme polohu desek v okamžiku nárazu světelného paprsku.

Na vodorovném ramenu urazí světlo po cestě tam i zpátky vzdálenost L rovnou vzdálenosti mezi zrcadly A a B. Po cestě k zrcadlu B letí světlo stejným směrem, jakým se pohybuje celá aparatura. Zdánlivá rychlost světla z pohledu aparatury bude tedy v tomto případě $c - v$. Po zpáteční cestě bude z pohledu aparatury rychlost světla $c + v$ a obě cesty tak světlo vykoná za čas

$$t_1 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \quad (21)$$

Podívejme se nyní na pohyb světla druhým ramenem. Označíme-li t_2 dobu pohybu světla druhým ramenem, pak z obrázku 14 a Pythagorovy věty dostáváme

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = L^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2,$$

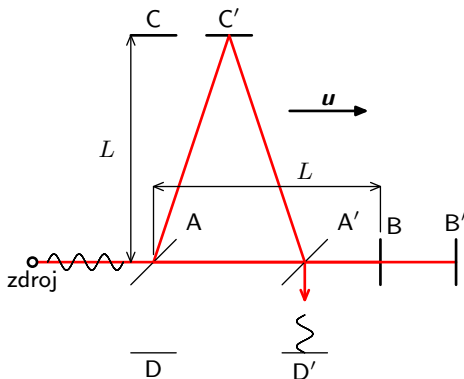


Obr. 13. Schéma Michelsonova pokusu

⁴) Viz minulý seriál či některá z učebnic o optice.

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (22)$$

Vidíme, že doby letů obou paprsků jsou rozdílné a závisí na průmětu vektoru rychlosti Země v éteru na horizontální rameno aparatury. Když proto budeme zkoumat interferenci paprsků prošlých oběma rameny, měl by se v průběhu roku interferenční obrazec měnit v důsledku kruhového pohybu Země kolem Slunce. Na základě známých rychlostí bylo předpovězeno, jak by se tento obrazec měl měnit a bylo rovněž vypočteno, že předpovídaný efekt by měl být dobře pozorovatelný.



Obr. 14. Aparatura Michelsonova experimentu v pohybu

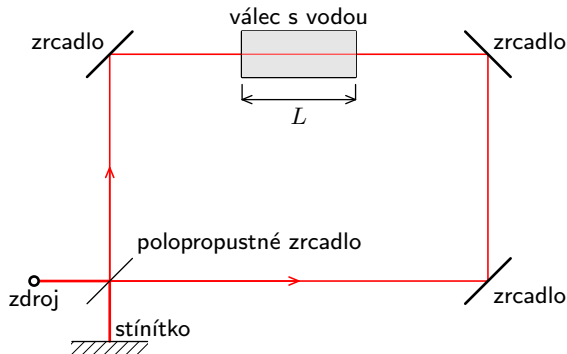
Když Michelson všechno důkladně sestavil a dlouhodobě prováděl svá pozorování, nebyl (v rámci chyby měření) schopen naměřit *vůbec žádnou* rychlost Země v éteru, což zcela zmátlo tehdejší vědeckou veřejnost. Znamená to snad, že se Země vůči éteru nepohybuje? První zoufalý pokus o vysvětlení navrhol, že Země při svém pohybu strhává éter s sebou, a proto je vůči němu v klidu. Protože s sebou tato teorie přinášela mnohé protichůdné předpovědi, byla brzy zavržena. Zajímavý způsob, jak z toho ven, vymyslel Lorentz. Navrhl, že pohybující se objekty se ve směru pohybu zkracují faktorem $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. V tom případě by se při pohybu světla zkrátilo rameno AB na délku γL a oba dva časy (21), (22) by si byly rovny. Jak se ukázalo později, v podstatě trefil hřebík na hlavičku. V roce 1905 totiž na scénu vstoupil Albert Einstein a jeho fenomenální speciální teorie relativity. V ní je problém rozřešen velice jednoduše – Einstein prostě postuloval, že vždycky, když budeme měřit rychlost světla ve vakuu (a to ať jsme kdokoli a budeme měřit jakýmkoli způsobem), naměříme stejnou hodnotu. A to je vše.

Mnoho lidí tomu pochopitelně nevěřilo, ovšem Einstein na základě této a několika dalších myšlenek vybudoval ucelenou teorii, která předpovídala některé další jevy (ekvivalenci hmoty a energie, dilataci času, ...). Protože všechny tyto předpovědi byly experimentálně ověřeny, je pravděpodobné, že i Einsteinova hypotéza je správná. Proto dnes věříme v to, že žádný éter neexistuje, a na přírodu dnes pohlížíme brýlemi speciální teorie relativity.

Tak obohatil rozpor dvou teorií vědu o zcela nové poznatky a svým nesporným dílem k tomu přispěl i A. Michelson.

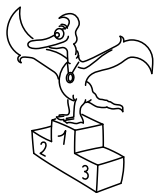
Úloha III. S ... céčková

- a) Představte si, že vezmete dostatečně silný laser, vyzářující světlo vlnové délky 400 nm, a posvítíte s ním na Měsíc. Od jeho povrchu se vyzářené světlo odrazí a vrátí se zpět. Předpokládáme-li, že laser vyzářuje skrze kruhový otvor průměru 1 cm, jaký bude na zemském povrchu průměr paprsku navracejícího se po odrazu zpět? Poradíme vám, že to bude o poznání více než 1 cm.
- b) V této úloze předpokládejte, že éter skutečně existuje, a předpovězte, jak by to dopadlo, kdyby Michelson prováděl svá měření jiným způsobem: Jedno rameno by nechal dlouhé 5 metrů, zatímco druhé by bylo dlouhé 10 m. Takto připravená aparatura by vytvořila nějaký interferenční obrazec. Poté by Michelson celou soustavou otočil o 90° , takže by si obě ramena vyměnila místa. V průběhu tohoto otáčení by docházelo k posunům interferenčních proužků⁵. Jak by se v uvedené aparatuře posunuly interferenční proužky při naznačené rotaci? Jak dlouhé by muselo být delší rameno, aby se interferenční proužky vyměnily, tedy aby se rotací maxima posunula na minima?
- c) V následující úloze předpokládejte, že éter existuje a že těleso pohybující se v éteru jej úplně strhává, takže relativní rychlost tělesa vůči éteru je nulová. Jaký fázový posun by poté vznikl mezi dvěma paprsky v soustavě naznačené na obrázku?



Světlo ze zdroje se na polopropustném zrcadle rozdělí na dva svazky a pokračuje po dokonale obdélníkové dráze zpět na polopropustné zrcadlo, kde vystupuje na stínítko, na kterém sledujeme interferenční proužky. Po cestě jsou oba paprsky třikrát odrazeny na zrcadle a procházejí válcem délky L naplněným vodou. Celá soustava kromě válce s vodou (ten je vůči éteru v klidu, nezapomeňte) se vůči éteru pohybuje rychlostí v směrem vpravo.

⁵⁾ Představte si rotující dvojštěrbinu.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie prvních ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|-----------------------------|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|------------|-----------|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 8 | 6 | 33 | <i>100</i> | 33 |
| 1. <i>Patrik Švančara</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | 1 | 3 | – | 1 | 3 | 8 | 2 | 18 | <i>62</i> | 18 |
| 2. <i>Peter Kosec</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | 1 | 3 | 7 | 2 | 16 | <i>64</i> | 16 |
| 3. <i>Stanislav Fořt</i> | G P. de Coubertina, Tábor | 1 | 3 | 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 13 | <i>39</i> | 13 |
| 4.–5. <i>Adam Chlapečka</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | – | 3 | – | – | 6 | <i>86</i> | 6 |
| <i>Jiří Nárožný</i> | G, Boskovice | 3 | 3 | – | – | – | – | – | 6 | <i>86</i> | 6 |
| 6.–8. <i>Ondřej Beneš</i> | SPŠ, Hronov | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | <i>100</i> | 3 |
| <i>Markéta Švecová</i> | G, Havlíčkův Brod | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | <i>100</i> | 3 |
| <i>Tomáš Trégnér</i> | G J. Heyrovského, Praha | 0 | 3 | – | – | – | – | – | 3 | <i>43</i> | 3 |
| 9. <i>Martina Štarhová</i> | G, Šumperk | – | 0 | – | – | – | – | – | 0 | <i>0</i> | 0 |

Kategorie druhých ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|----------------------------------|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|------------|-----------|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 8 | 6 | 33 | <i>100</i> | 33 |
| 1. <i>Barbora Drozdová</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | 0 | 3 | – | 1 | 2 | 7 | – | 13 | <i>57</i> | 13 |
| 2. <i>Zuzana Bogárová</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 1 | – | – | 3 | 4 | – | 8 | <i>53</i> | 8 |
| 3. <i>Anna Chejnovská</i> | G B. Němcové, Hradec Králov | – | 3 | 0 | – | 2 | – | – | 5 | <i>45</i> | 5 |
| 4.–5. <i>Ondřej Maslíkiewicz</i> | SPŠ, Hronov | 0 | 3 | – | 1 | – | – | – | 4 | <i>36</i> | 4 |
| <i>Tomáš Pikálek</i> | G, Boskovice | – | 3 | – | 1 | – | – | – | 4 | <i>57</i> | 4 |

Kategorie třetích ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|----------------------------|--------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|----|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 8 | 6 | 33 | 100 | 33 |
| 1. Tereza Steinhartová | G J. K. Tyla, Hradec Králové | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 6 | 4 | 19 | 58 | 19 |
| 2.–3. Zuzana Dočekalová | G, F. Hajdy, Ostrava | – | 4 | 1 | – | 3 | 7 | 3 | 18 | 72 | 18 |
| <i>Miroslav Rapčák</i> | G, Orlová | 2 | 3 | 1 | 1 | 4 | 4 | 3 | 18 | 55 | 18 |
| 4. Petr Ryšavý | G J. Heyrovského, Praha | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 6 | 1 | 17 | 52 | 17 |
| 5. Jana Bazová | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | 1 | 3 | 7 | – | 14 | 74 | 14 |
| 6. Tereza Jeřábková | SPŠ a SOU Letohrad | – | 3 | – | 1 | 4 | 5 | – | 13 | 68 | 13 |
| 7.–9. Ján Bogár | G Ludovíta Štúra, Trenčín | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | – | – | 9 | 47 | 9 |
| <i>Veronika Paštyková</i> | G J. Ortena, Kutná Hora | 0 | 3 | 1 | – | 1 | 4 | 0 | 9 | 31 | 9 |
| <i>Lada Peksová</i> | G Ch. Doppl., Zborovská, Praha | 3 | 3 | 2 | 1 | – | – | – | 9 | 60 | 9 |
| 10. Petr Cagaš | G, Lesní čtvrť, Zlín | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | – | – | 8 | 42 | 8 |
| 11.–12. Viktor Jamrich | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | – | – | – | – | 7 | – | 7 | 88 | 7 |
| <i>Stanislav Paláček</i> | G M. Koperníka, Bílovec | 3 | 3 | 1 | – | – | – | – | 7 | 64 | 7 |
| 13. Jan Hodic | G J. Ressela, Chrudim | 0 | 3 | 0 | 1 | 2 | – | – | 6 | 32 | 6 |
| 14.–15. Petra Kňázková | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | – | – | 1 | – | 4 | – | 5 | 42 | 5 |
| <i>Jan Nevoral</i> | G, Jana Masaryka, Jihlava | 1 | 3 | – | 1 | – | – | – | 5 | 45 | 5 |
| 16.–18. Martin Chudjak | SPŠ Martin | – | 2 | – | – | – | – | 2 | 4 | 44 | 4 |
| <i>Michal Müller</i> | G, Jevíčko | 2 | 2 | – | – | – | – | – | 4 | 57 | 4 |
| <i>Pavel Novotný</i> | G P. de Coubertina, Tábor | – | 3 | – | – | 1 | – | – | 4 | 57 | 4 |
| 19.–20. Vojtěch Dzięwiński | SG Dr. Randy, Jablonec n. N. | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | 100 | 3 |
| <i>Jiří Keresteš</i> | VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | 100 | 3 |
| 21. Michal Husek | G, Bučovice | 0 | 0 | 1 | 1 | – | – | – | 2 | 13 | 2 |

Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|---------------------------|--------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|----|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 8 | 6 | 33 | 100 | 33 |
| 1. Pavel Malý | G Ch. Doppl., Zborovská, Praha | 4 | 3 | 1 | 1 | 2 | – | 3 | 14 | 56 | 14 |
| 2. Mária Kiefferová | G Sv. Františka, Žilina | 4 | 4 | – | 1 | 3 | – | – | 12 | 80 | 12 |
| 3.–4. Michael Hakl | G Ch. Doppl., Zborovská, Praha | 3 | 4 | 1 | 2 | – | – | – | 10 | 67 | 10 |
| <i>Lukáš Labor</i> | G, Třinec | 2 | 3 | 1 | 1 | – | – | 3 | 10 | 48 | 10 |
| 5.–7. Jan Humplík | První české G, Karlovy Vary | 4 | 3 | 1 | 1 | – | – | – | 9 | 60 | 9 |
| <i>Karel Kolář</i> | G, Špitálská, Praha | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | – | – | 9 | 47 | 9 |
| <i>Martin Polačko</i> | G, Alejová, Košice | 4 | 3 | 1 | 1 | – | – | – | 9 | 60 | 9 |
| 8. Hana Šustková | G, Trutnov | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 3 | – | 8 | 30 | 8 |
| 9. Alžběta Pechová | SPŠ strojnická, Vsetín | – | 2 | – | 1 | – | 4 | – | 7 | 47 | 7 |
| 10. Jana Figulová | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | – | – | 3 | – | 6 | 55 | 6 |
| 11.–12. Lukáš Čimpl | G, Frenštát pod Radhoštěm | 2 | 3 | – | – | – | – | – | 5 | 71 | 5 |
| <i>Tereza Zábojníková</i> | G, Uherské Hradiště | – | – | 1 | – | 2 | – | 2 | 5 | 36 | 5 |
| 13. Václav Obrázek | G Jana Keplera, Praha | 1 | 3 | – | – | – | – | – | 4 | 57 | 4 |
| 14.–16. Katarína Bazová | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | 100 | 3 |
| <i>Dana Suhomelová</i> | G Ludovíta Štúra, Trenčín | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | 100 | 3 |
| <i>Martina Vaváčková</i> | G P. de Coubertina, Tábor | – | 3 | – | – | – | – | – | 3 | 100 | 3 |
| 17. Eva Hašková | G a SOŠ, Úpice | 1 | 1 | – | – | – | – | – | 2 | 29 | 2 |
| 18. Peter Vanya | G Jura Hronca, Bratislava | – | – | – | – | – | – | 1 | 1 | 17 | 1 |

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.