21. ročník, úloha V . 3 ... *schody z nebe* *(4 body; průměr 2,39; řešilo 23 studentů)*

Žebřík vede jen dva kilometry na plošinu, ze které se dále sestupuje po schodech, jež se mohutným obloukem klenou nad krajinou. Schodiště má zvláštní tvar. Je totiž postavené tak, že se na každý krok vynaloží stejná práce. Odvoď, jak závisí výška schodu na vzdálenosti od osy Rámy, pokud je délka schodů konstantní. Také můžeš určit, jaký tvar má onen oblouk.

Vymyslel čtenář Martin Formánek.

Zamysleme se nejdřív, jak úlohu chceme počítat. Nejdříve si musíme ujasnit, proti kterým silám budeme konat práci. Jde o rotující soustavu a hlavní slovo zde má síla setrvačná odstředivá. V neinerciální soustavě spojené s rotujícím Rámou také pozorujeme účinky Coriolisovy síly, ale tu zanedbáme, jelikož otáčení Rámy a rychlost a hmotnost člověka jdoucího po schodech jsou tak malé, že výsledná síla bude v jednotkách newtonů, což chodec ani nepozná.

Další věcí je tvar schodiště. Na obrázku ze zadání je schodiště vyvedeno jako křivka směřující podél osy Rámy, což je konstrukčně nevýhodné. Kvůli úspoře materiálu apod. je lepší schody postavit v podstavě válce.

K počítání výšky schodů v závislosti na poloměru se můžeme dobrat dvěma způsoby. Při prvním práci potřebnou na překonání jednoho schodu počítáme určitým integrálem ($W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$), při druhém si řekneme, že výška schodů vůči Rámovi je zanedbatelná, a tedy síla, proti které konáme práci, se téměř nemění ($W = Fs$). Jak se vytrvalý čtenář může přesvědčit (a jak opravující udělal), oba postupy dávají kvantitativně téměř nerozlišitelné výsledky.

Ale fyzik zanedbá, co může, takže provedeme pouze ten způsob výpočtu, kde uvažujeme neměnné odstředivé zrychlení na výšce jednoho schodu.

Uveďme značení, které budeme používat. Ráma má vnitřní poloměr R, plošina je vzdálená H od osy rotace. Schody mají konstantní délku d a výška k-tého je h_k a jeho vzdálenost od Rámy je r_k. Pro počítání tvaru křivky uvažme, že $x = 0$ je u styku Rámovy podstavy s jeho pláštěm.

Nejdříve je potřeba určit, jaká práce bude nutná k překonání jednoho schodu. Tato práce musí být shodná pro všechny schody, tedy i pro první,

$$W = W_1 = m\omega^2 r_1 h_1 = m\omega^2 (R-h)h\,,$$

kde h je výška prvního schodu a $R - h$ je jeho vzdálenost od osy Rámy. Volíme tuto hodnotu proto, že chceme, aby první schod byl ten u paty schodiště a navíc aby vzdálenost plošiny posledního schodu od osy byla rovna H (čtenář si rozmyslí, proč je tedy $r_1 = R - h$).

Tedy obecně práce potřebná na překonání k-tého schodu bude rovna

$$W_k = m\omega^2 r_k h_k\,,$$

která ovšem musí být rovna práci W potřebné na překonání každého schodu, proto

$$m\omega^2 r_k h_k = m\omega^2 (R-h)h\,,$$

$$h_k = \frac{(R-h)h}{r_k}\,.$$

Nic nám nebrání funkci spojitě prodloužit na celý interval $r \in (H, R)$, tedy

$$h_{\mathrm{s}}(r) = \frac{(R-h)h}{r}\,.$$

Toto je hledaná závislost výšky schodu na vzdálenosti od osy Rámy, funkce je zřejmě nepřímá úměrnost. Nicméně tvar křivky to stále není. Vypočítáme-li směrnici tečny ke křivce, můžeme potom integrací vypočítat, jak křivka vypadá. Uvažme, že schod je oproti Rámovi zanedbatelně malý, a tedy tečnu ke schodišti vypočteme jako poměr výšky ku délce schodu. Výšku schodu popisuje už objevená závislost $h_\mathrm{s}(r)$

$$\Delta r = \frac{(R-h)h}{r}\,.$$

Délku schodu známe, je konstantní, rovná d

$$\Delta x = d\,.$$

Tedy tečna ke schodišti bude poměr $\Delta r/\Delta x$. Uvážíme-li, že jednotlivé schody jsou zanedbatelně malé, tento poměr přejde k derivaci.

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{(R-h)h}{dr} \to \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}.$$

Odseparujeme proměnné a vypočteme integrály

$$\int r\,\mathrm{d}r = \int \frac{(R-h)h}{d}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$r(x) = \sqrt{2\left(\frac{(R-h)h}{d}x + C\right)}\,.$$

Konstantu C určíme z podmínky, že $r(0) = H$. Tedy $C = H^2/2$. Hledaná závislost popisující tvar schodiště je tedy

$$r(x) = \sqrt{\frac{2(R-h)h}{d}x + H^2} \approx \sqrt{\frac{2Rh}{d}\,x + H^2}$$

a tvarem schodiště je tudíž parabola.

Uvažujeme-li schodiště v podstavě, bude v polárních souřadnicích pro délku schodu platit

$$d = r\Delta\varphi\,.$$

A tedy docházíme k rovnici, kterou vyřešíme obdobně jako v minulém případě.

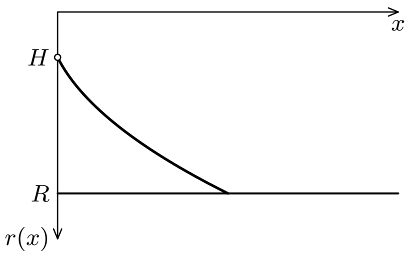
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(R-h)h}{d}\,,$$

$$\int \mathrm{d}r = \int \frac{(R-h)h}{d}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

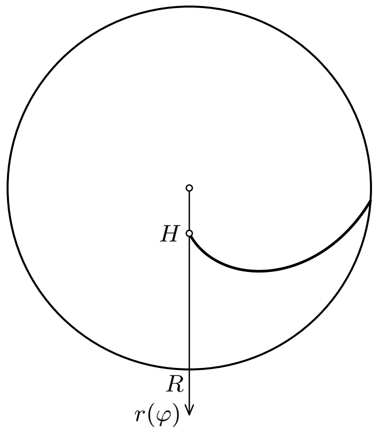
$$r(\varphi) = \frac{(R-h)h}{d}\varphi + D\,.$$

Konstantu D určíme tak, že stanovíme, že nulový úhel φ určuje začátek schodiště na plošině uprostřed podstavy, tedy $r(0) = H$, z čehož vyplývá, že i $D = H$. Hledaná závislost je tedy přímo úměrná úhlu φ.

$$r(\varphi) = \frac{(R-h)h}{d}\varphi + H \approx \frac{Rh}{d}\,\varphi + H\,.$$



Obr. 1. Tvar schodiště klenoucího se v Rámovi pro $d = 2h$



Obr. 2. Tvar schodiště v podstavě Rámově pro $d = 2h$

Z řešení vyplývá, že při obou způsobech konstrukce bude výška schodu klesat s první mocninou poloměru. Postavíme-li schodiště kolmo k podstavě Rámy, jeho tvarem bude parabola. Pokud jej ovšem postavíme v podstavě, bude to spirála.

Ve svých řešeních jste se většinou dopracovali ke správnému výsledku u výšky schodů, jen jste si častěji mohli zavést trochu jiné souřadnice (nejčastěji jste měli $r = 0$ u pláště Rámy). Bohužel se nenašlo moc řešitelů, kteří aspoň náznakem vypočítali tvar schodiště, a bylo dost takových, kteří si funkci popisující výšku schodu spletli s tvarem schodiště. Ale správná řešení jsem nenechával nepovšimnuta.

Aleš Podolník
ales@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.