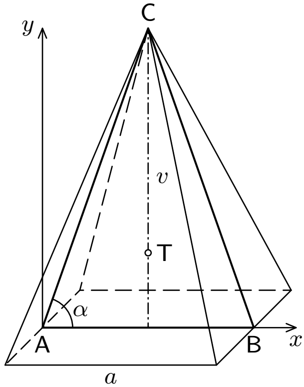
21. ročník, úloha IV . P ... *projekt 5* *(4 body; průměr 2,52; řešilo 27 studentů)*

Navrhněte spravedlivou (či co nejvíce spravedlivou) pětistěnnou kostku. Přesněji máme na mysli takové pětistěnné těleso, které se při hodu na podložce zastaví na každé své stěně se stejnou pravděpodobností. *Vymysleli náruživí hráči Aleš Podolník a Marek Scholz.*

Patrně každý aspoň jednou v životě házel hrací kostkou. Jistě jste si po několika pokusech říkali, že právě ta hodnota, kterou potřebujete, nikdy nepadne. Za takovouto hráčskou smůlu však zpravidla nemůže kostka samotná, ale cosi jako „zákon schválnosti“. Jeho opodstatněnost se dá matematicky ukázat na mnoha příkladech. Jmenujme alespoň obligátní prasklou žárovku v sériovém zapojení[1]. Avšak skutečnost je taková, že klasická (šestistěnná) hrací kostka i v tom nejobyčejnějším provedení je velmi dobře spravedlivá, neboť její tvar vychází z krychle. Krychle je jedno z pěti platónských těles, kterými dále jsou pravidelný čtyřstěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Žádné z uvedených těles však nemá pět stěn. První otázka, kterou je třeba zodpovědět, je, zda existují i jiná tělesa, jejichž užitím bychom obdrželi spravedlivou hrací kostku? Zkušení hráči se možná setkali i s „desetistěnkami“ apod. Jsou však takové kostky spravedlivé? Jejich výrobci nás o tom sice přesvědčují, ale jaká je skutečnost?



Obr. 1. Jehlan

Předně si ujasněme, že výstupem naší práce by mělo být těleso s rovinnými stěnami, které dopadne se stejnou pravděpodobností na každou z těchto stěn. Tím zakážeme poněkud zvrhlou kostku tvarem připomínající ragbyový míč. Co musí takový objekt splňovat? Především musí mít ve všech polohách po dopadu stejnou potenciální energii, tj. vzdálenost všech stěn od těžiště kostky musí být stejná. Dále by měly být všechny stěny identické (až na zrcadlovou symetrii) a identicky umístěné vůči všem ostatním. Jinak řečeno jedna stěna od druhé nesmí být rozlišitelná. To je z toho důvodu, aby při odvalování kostky po podložce nešlo předvídat, na kterou stěnu se kostka aktuálně převalí. V libovolném směru se vykoná stejná práce, tedy není nic pro kostku výhodnější. Vykonání stejné práce ve všech směrech pak ve svém důsledku vynucuje značnou symetričnost kostky. A konečně, těleso musí být nutně konvexní.

Pro konvexní tělesa s víc než třemi stěnami platí Eulerův vzorec

$$V + N = E + 2\,,$$

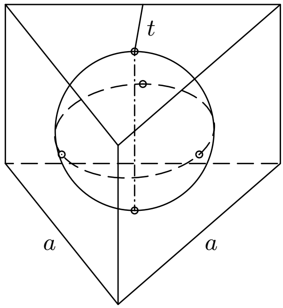
ve kterém V značí počet vrcholů, N počet stěn a E počet hran. Jelikož jsou si všechny stěny spravedlivé kostky rovny, musejí mít všechny také stejný počet hran. Tento počet označme M. Protože každá hrana přísluší dvěma stěnám, máme snadno

$$E = \tfrac{1}{2}MN\,.$$

Protože nás zajímá pětistěnná kostka, $N = 5$, musí být číslo M sudé. Taková kostka se tedy musí skládat z pěti shodných sudoúhelníků. Z nich ovšem přichází v úvahu jedině čtverec, neboť každý další s více hranami by znamenal i větší počet stěn kostky.

[1] Viz například Jiří Anděl: *Matematika náhody.*

Tímto jsme dokázali, že zcela spravedlivá pětistěnná kostka nemůže existovat. Pokusme se v následujícím textu alespoň o nějaké dostatečně dobré přiblížení. Ihned nás napadnou dvě poměrně pravidelná pětistěnná tělesa: jehlan a trojboký hranol. Prozkoumejme obě z hlediska podmínek, které jsme definovali ve třetím odstavci.



Obr. 2. Rozmístění pěti elektronů na sféře

Těžiště jehlanu se nachází v jedné čtvrtině jeho výšky, kterou označme v. Dále nechť a je délka strany podstavy. Podíváme-li se na řez jehlanu kolmý k podstavě a obsahující výšku, dostaneme opět trojúhelník, po němž v souladu s podmínkami požadujeme, aby vzdálenost těžiště jehlanu byla od všech stran shodná. Tento trojúhelník je zřejmě rovnoramenný. Umístěme počátek soustavy souřadnic do jednoho z vrcholů při základně, bez újmy na obecnosti nechť je to A v obvyklém značení trojúhelníka ABC. Pak souřadnice těžiště jehlanu jsou $\mathsf{T} = (a/2, v/4)$. Chceme nyní provázat parametry a a v nějakou rovnicí. Přímka, jejíž podmnožinou je strana AC je vyjádřitelná jako $p : y = x \operatorname{tg} \alpha$, kde α je vnitřní úhel trojúhelníka, který očividně splňuje $\operatorname{tg} \alpha = v/(a/2)$. Vzdálenost bodu T od přímky AC vypočítáme ze známého vzorečku

$$|\mathsf{AC}, \mathsf{T}| = \frac{\left| \frac{2v}{a} \cdot \frac{a}{2} - \frac{v}{4} \right|}{\sqrt{\left(\frac{2v}{a} \right)^2 + 1}} = \frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}} \,.$$

Chceme, aby tato vzdálenost byla stejná jako vzdálenost T od přímky AB. Rovnost

$$\frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{v}{4}$$

je splněna, platí-li $\sqrt{2}a = v$. Bude-li mít jehlan takovýto poměr délky strany podstavy a tělesové výšky, pak bude mít ve všech stabilních polohách stejnou potenciální energii. Jehlan přesto není dobrým kandidátem pro spravedlivou pětistěnnou kostku. (Při kutálení je zapotřebí různých energií pro přetočení se přes jednotlivé hrany. A co teprv „horní“ vrchol!)

Naproti tomu situace s trojbokým hranolem je o poznání veselejší. Můžeme si ji přiblížit následujícím myšlenkovým experimentem. Mějme sféru a na ní umístěme pět elektronů. Ty se vlivem elektrostatických sil odpuzují, dokud se nedostanou do energeticky nejúspornější konfigurace. Je-li sféra normovaná (tj. má jednotkový poloměr), stačí najít minimum funkce

$$E = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} \frac{1}{d_{i,j}} \,,$$

kde $d_{i,j}$ označuje vzdálenost i-tého od j-tého elektronu (vyjádříme je pomocí Pythagorovy věty a díky znalosti rovnice sféry). Řešení tohoto problému je matematicky velmi pracné, naštěstí existují počítače, s jejichž pomocí nám vyjde, že dva elektrony budou na pólech a zbylé se rovnoměrně rozmístí podél rovníku. Vzdálenosti mezi těmi ekvatoriálními jsou $\sqrt{3}$, resp. $\sqrt{2}$ mezi jedním z nich a elektronem na pólu. Jestliže nyní zkonstruujeme tečné roviny procházející místy, kde se nacházejí elektrony, dostaneme přesně trojboký hranol. Navíc bude splňovat podmínku o těžišti. To však není postačující podmínka férovosti kostky.

Pojďme ještě vypočítat optimální poměr velikostí jednotlivých stran hranolu. Zřejmě jeho základnou je rovnostranný trojúhelník. Nechť a je jeho strana a dále v buď jeho výška. Zřejmě platí $v = \sqrt{3}a/2$. Vzhledem k tomu, že těžiště trojúhelníka je v jedné třetině výšky, je vzdálenost těžiště od libovolné strany pláště hranolu $t = \sqrt{3}a/6$. Tělesová výška hranolu musí nutně být $2t$. Mějme tedy takovýto trojboký hranol a určeme nyní, jak velkou vykonáme práci při překlopení z jedné boční hrany na jinou. Z Pythagorovy věty máme

$$\Delta W \sim \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2} - t = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{12}a^2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a = t\,,$$

Práce při překlápění z boční stěny na podstavu je naproti tomu úměrná výrazu $(\sqrt{2}-1)t$. Ačkoli toto není ani polovina předchozí hodnoty, konstrukce kvalitnějšího modelu by byla mnohem komplikovanější, a proto si dovolíme takovouto nepřesnost.

Symetrické pětistěnné těleso jsme ukázali, že neexistuje, nicméně jsme našli hranol, který velmi dobře splňuje podmínky z úvodu. Kostky, které bychom však na základě této představy vyrobili, by však zcela jistě stoprocentně spravedlivé nebyly. Nicméně tento fakt neodrazuje výrobce, aby pětistěnnou kostku prodávali. Existuje dokonce patent číslo United States Patent 6926275, který vychází z naší představy o trojbokém hranolu a drobnými úpravami jej vylepšuje, aby byl spravedlivější. Uvedené těleso však není pětistěnné, a tedy nevyhovuje podmínkám zadání úlohy. Naproti tomu „ragby“ kostky jsme uznávali jako splňující zadání úlohy, ačkoli si jejich řešitelé situaci významně zjednodušili.

Závěrem doplňme zdroje, ze kterých jsme čerpali:

- Diaconis, Keller: *Fair Dice*, American Math. Monthly 96, 1986;
- Fair Dice, `http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm`;
- Min-Energy Configurations of Electrons On A Sphere, `http://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm`;
- Properties of Dice, `http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm`;
- US Patent 6926275, `http://www.freepatentsonline.com/6926275.html`.

Tomáš Jirotka
byrot@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.