21. ročník, úloha IV . 3 ... sopka burácí *(4 body; průměr 1,64; řešilo 22 studentů)*

Nedávno v televizi proběhl dokument o výbuchu sopky Krakatoa v srpnu 1883. Pozoruhodné je, že rachot výbuchu dočasně ohlušil lidi (nějakou dobu nic neslyšeli) ve vzdálenosti 50 km od vulkánu. Dokonce byl slyšet jako vzdálené hřmění ve městě Alice Springs v centrální Austrálii, tj. asi 5 000 km (slovy pět tisíc kilometrů) od sopky.

Jaká byla hodnota akustického tlaku v dB v místě výbuchu? Můžeme předpokládat, že platí zákon úbytku intenzity se čtvercem vzdálenosti, či jaký zákon úbytku intenzity bude platit pro tento případ? *Úlohu vymyslel pan Janata inspirován zmíněným dokumentem.*

Úloha se zabývala šířením energie exploze ve vzduchu. Nejdříve vysvětlíme rozdíl mezi *rázovou* a *zvukovou* vlnou. Rázové vlny (angl. shockwave) vznikají při uvolnění velkého množství energie z malého objemu. Energie se v prostředí šíří rychlostí několikanásobně větší, než je rychlost zvuku. Při přechodu rázové vlny dochází ke skokovým změnám vlastností prostředí (teplota, tlak, hustota, příp. orientace magnetického pole). Energie nesená rázovou vlnou se vzdáleností velice rychle ubývá (až s třetí mocninou vzdálenosti). Základní zjednodušení, které se při výpočtech používá, je, že tlak a hustota mimo rázovou vlnu jsou zanedbatelné oproti tlaku a hustotě uvnitř rázové vlny. Za přepracovanou teorii vděčíme pánům Taylorovi a Sedovovi z projektu Manhattan. Všechny rázové vlny proto velice rychle degradují na běžné zvukové vlny. Při přechodu rázové vlny se částice prostředí pohybují velkými rychlostmi pouze ve směru jejího šíření. Naproti tomu při přechodu zvukové vlny částice oscilují docela malými rychlostmi oběma směry. Změnu tlaku při přechodu rázové vlny má na svědomí jednak dočasné nahuštění molekul za rázovou vlnou, jednak přímo pohyb molekul od centra exploze (tzv. „blast wind pressure“ Q). U silných rázových vln (více než cca 207 dB) je druhá složka větší. Při atmosférickém tlaku se všechny vlny intenzivnější než asi 194 dB chovají spíše jako rázové.

Nejprve zkusíme určit akustický tlak za předpokladu, že to, co slyšeli lidé v Austrálii, byl skutečně zvuk. Nanejvýš problematické je zde odhadnout, jak silné asi bylo ono „vzdálené hřmění“. Použijeme pracovní odhad 40 dB (tichá ulice; muselo být dostatečně silné, aby ho bylo možné odlišit od hluku pozadí, tj. ne úplně na hranici slyšitelnosti). Intenzita zvuku je definována vztahem

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde T je perioda kmitů, $p(t)$ je okamžitá hodnota tlaku a $\boldsymbol{v}(t)$ rychlost pohybu částic. Měří se ve wattech na metr čtvereční. Absolutní hodnota intenzity zvuku (intenzita je vektor) v decibelech je

$$L_{\mathrm{I}}[\mathrm{dB}] = 10 \log \frac{I}{10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}\,, \tag{1}$$

respektive

$$L_{\mathrm{P}}[\mathrm{dB}] = 20 \log \frac{p}{2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa}}\,, \tag{2}$$

kde I je absolutní hodnota intenzity v místě měření a p průměrná hodnota tlaku při přechodu zvukové vlny. Zde je nutno poznamenat, že rovnost

$$L_{\mathrm{I}} = L_{\mathrm{P}}$$

platí pouze přibližně a to jen do intenzity asi 120 dB. Pak už se kvůli fyzikálním vlastnostem vzduchu začínají obě hodnoty lišit a je třeba mezi nimi rozlišovat.

Absolutní hodnota intenzity ubývá se čtvercem vzdálenosti

$$I \sim \frac{1}{r^2}\,.$$

Důležitou roli hrají také jiné procesy. Vzduch se při přechodu zvukových vln mírně zahřívá. Všechny procesy, které se na disipaci energie podílejí, se většinou dají shrnout a jejich vliv lze popsat exponenciálním poklesem intenzity se vzdáleností. Ubývání se zvyšuje se stoupající vlhkostí, teplotou a je kvadraticky závislé na frekvenci zvuku (nízké frekvence jsou tlumené nejméně). Díky šikovně zvolené stupnici se dá mluvit o konstantním úbytku (v decibelech) na jednotku vzdálenosti. Za normálních podmínek jsou to pro nízké frekvence asi 4,7 dB/km, což je zanedbatelné na malé vzdálenosti, ale velice výrazné na 5000 kilometrech.

Vypočteme-li absolutní hodnotu intenzity v Austrálii číselně, dostaneme $I \doteq 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}$. Intenzita 1 km daleko od výbuchu by byla 5000^2-krát větší, z čehož dosazením do vzorečku (1) dostaneme hodnotu akustického tlaku asi 114 dB. Kdybychom teď započítali exponenciální ubývání 4,7 dB/km, dostali bychom 23 000 dB, což není realistický výsledek. Při použití rovnosti $L_\mathrm{I} = L_\mathrm{P}$ by pro tlak vycházelo naprosto nesmyslných více než 10^{1000} Pa. I když je za to částečně zodpovědný zjednodušený model poklesu intenzity se vzdáleností (exponenciální ubývání), dá se také nahlédnout, že energie se musela v blízkosti exploze šířit jiným způsobem (tlaková vlna).

Teorie rázových vln je poměrně komplikovaná. My použijeme několik přibližných empirických vzorečků, které se používají v pyrotechnice na odhad síly exploze (převzato z Kinney, *Explosive Shocks in Air*). Samotný přetlak rázové vlny P (rozdíl tlaku před přechodem a těsně po přechodu rázové vlny) klesá jako

$$P[\mathrm{dB}] \sim 20 \log \left(\frac{1}{r^3}\right)\,. \tag{3}$$

Celkový akustický přetlak (ono p ve vzorci pro L_P) má však ještě složku způsobenou pohybem molekul

$$Q = \tfrac{1}{2}\varrho U^2\,,$$

kde ϱ je hustota vzduchu a U je rychlost pohybu molekul od exploze. Když c bude rychlost zvuku, tak U vypočítáme jako

$$U = \frac{P}{c\varrho}$$

pro tlaky do zhruba 175 dB. Pro tlaky vyšší by byl vztah komplikovanější. Přibližně můžeme Q určit jako

$$Q = \frac{2{,}5 \cdot P^2}{7\,\mathrm{atm} + P}\,.$$

Akustický tlak, který ohlušil lidi 50 km od výbuchu, odhadneme na $L_\mathrm{P} \doteq 160\,\mathrm{dB}$ (výstřel z hlučné pušky 1 m od ucha). Podle (2) je tedy $p = 2\,\mathrm{kPa}$. Jelikož $p = P + Q$, dosazením z předchozího vztahu máme

$$p = P + \frac{2{,}5 \cdot P^2}{7\,\mathrm{atm} + P} \quad \Rightarrow \quad P \doteq 1986\,\mathrm{Pa}\,.$$

Ve vzdálenosti 50 km od výbuchu bylo tedy hlavní složkou P. Půl kilometru od výbuchu (tedy už uvnitř exploze) pak byl podle (3) P o 120 dB větší, tj. asi 1 GPa. Q bylo jednoduše $2{,}5 \cdot P = 2{,}5\,\mathrm{GPa}$ (těch 7 atm je oproti 10 000 atm už zanedbatelných a uvedené vzorečky mají přesnost horší než 3 dB). Dohromady tedy $p \doteq 3{,}5\,\mathrm{GPa}$ neboli úctyhodných 285 dB.

V literatuře je zvykem udávat až 310 dB (anebo asi 14 Gt TNT, zde se už používá Richterova stupnice), což je více než desetkrát víc, ale myslí se tím celková energie uvolněná během několika dní trvání exploze. Jde jenom o řádový odhad. Podle *U.S. geological survey* měla exploze Sv. Heleny intenzitu asi 286 dB a 200 mil daleko ji bylo stále slyšet s hladinou intenzity 163 dB (rozbila několik oken). Blíže k výsledku by se možná dalo dopracovat i lepším odhadem intenzity zvuku, který ohlušil lidi 50 km daleko.

Prakticky ve všech došlých řešeních se řešitelé snažili vypočítat šíření exploze jako šíření zvuku. Za správně vypracovanou teorii šíření zvuku a výsledek jsme však mohli udělit jenom dva body. Kdo si uvědomil, že zvuk je ve vzduchu tlumen kromě kvadratického úbytku se vzdáleností také exponenciálně, a správně okomentoval nesoulad s pozorováním (buď vyšlo směšně vysoké číslo v blízkosti exploze, anebo naopak příliš nízké v Austrálii), mohl dostat až tři body. Nejde o to, za každou cenu se dopracovat k výsledku, někdy je ho třeba také správně interpretovat. Řešení, ve kterém by byl správně použitý výraz „tlaková“, resp. „rázová vlna“ by nebylo hodnoceno méně než čtyřmi body. Bohužel žádné takové nedošlo.

Z dalších chyb byl velmi častý argument, že kvadratické ubývání pro zvuk neplatí, protože zvuková vlna nemá kulový tvar, případně zbytečné úvahy o zakřivení Země. Velikost té části vlnoplochy, která dorazila až k detektoru (do ucha), se se vzdáleností měnila kvadraticky. Vybraný kus vlnoplochy nesl stále stejné množství energie nějakou rychlostí, takže výkon ve W/m^2, resp. intenzita zvuku se měnila kvadraticky. Je přitom úplně jedno, jaký tvar měla celá vlnoplocha. Zakřivení Země nevadí proto, že zvuk se bude šířit převážně nad povrchem, nebo se tam alespoň bude šířit nejrychleji (je zde nejvyšší tlak). Huygensův princip praví, že každý bod vlnoplochy se bude chovat jako zdroj vlnění, takže zvuk se bude kolem zakřivené Země ohýbat. Počítat se proto bude běžná vzdálenost po Zemi.

Odhadnout správně hlasitosti, které bylo po výbuchu slyšet, byl skutečně problém. Je však nesprávné předpokládat, že v Alice Springs musel být zvuk na hranici slyšitelnosti (to by ho pak asi nebylo možno rozeznat od zvuků pozadí) a také práh bolesti nezpůsobuje dočasné ohlušení. Exploze ohňostroje jsou mnohem hlasitější, ale díky tomu, že trvají velice krátce, tak to zas tolik nebolí. Akceptovali jsme skoro jakýkoli reálný odhad hlasitostí. Vážnější problém bylo odhadnout, v jaké vzdálenosti od centra počítat hlasitost výbuchu. Při výbuchu bylo vyvrženo více než 180 km^3 horniny do atmosféry. Ve vzdálenosti 1 km od centra je proto už uvnitř exploze. Odhady jako 1 m, anebo dokonce méně jsou proto nesprávné. Dostatečným přiblížením ($r \to 0$) by přece jinak bylo možné dosáhnout libovolně vysokou hodnotu.

Peter Greškovič
`grepe@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.