21. ročník, úloha III . E ... *zkoumáme pohyb Slunce* *(8 bodů; průměr 2,88; řešilo 16 studentů)*

Změřte co nejpřesněji výšku Slunce nad obzorem v pravé poledne a dobu od východu středu slunečního disku do jeho západu. Odvážlivci se mohou pokusit vypočítat teoretickou délku dne a hodnoty srovnat a okomentovat případný nesoulad.

Experimentální úlohu navrhl Pavel Brom.

Experimentální úloha se zabývá zdánlivým pohybem Slunce po obloze. Zkusme se nejprve zamyslet, jak by se teoreticky mělo Slunce pohybovat, a pak vypočítat časy jeho východu a západu. Budeme k tomu potřebovat zadefinovat několik základních astronomických pojmů.

Teorie

Ekvatoreální souřadnice jsou polární souřadný systém na nebeské sféře (podobně jako zeměpisná šířka a délka na zemském povrchu) tvořený souřadnicemi rektascenze α a deklinace δ. Množina bodů s nulovou deklinací tvoří tzv. nebeský rovník, což je v podstatě průmět zemského rovníku na nekonečně vzdálenou nebeskou sféru se středem v centru Země. Rektascenzi měříme podél nebeského rovníku proti směru otáčení Země od tzv. jarního bodu. Udáváme ji buď ve stupních, nebo v hodinách a minutách od 0 do 24 hodin. Deklinace je úhlová vzdálenost bodu na nebeské sféře od nebeského rovníku, měřená směrem k severnímu světovému pólu kladně a na jih záporně.

Ekliptika je velká kružnice na nebeské sféře tvořená množinou bodů do kterých se může v průběhu roku zdánlivě promítat Slunce v důsledku oběhu Země kolem Slunce. Jarní bod je jeden z průsečíků ekliptiky a nebeského rovníku. Slunce se promítá do jarního bodu každý rok na pravé poledne světového času v den jarní rovnodennosti. Podobně jako ekvatoreální souřadnice můžeme zavést i *ekliptikální souřadnice*: ekliptikální šířku a délku λ. Sklon roviny světového rovníku k rovině ekliptiky budeme značit ε.

Místní hvězdný čas t_s je v podstatě rektascenze bodu daného průsečíkem průmětu místního poledníku na nebeskou sféru a nebeského rovníku měřená v hodinách a minutách. Můžeme jej vypočítat jako

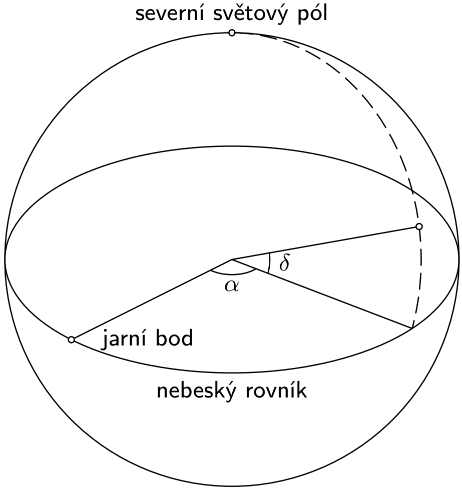
$$t_\mathrm{s} = \left(24 \cdot \frac{\text{čas uplynulý od 12:00 UT poslední jarní rovnodennosti}}{\text{doba otočení Země}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\text{zeměpisná délka}}{15^\circ}\right) \text{hodin}\,.$$

Rozdíl rektascenze nějakého bodu na nebeské sféře a místního hvězdného času

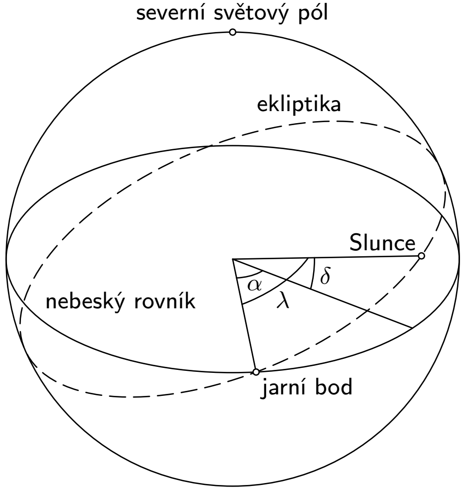
$$\vartheta = t_\mathrm{s} - \alpha$$

se nazývá *hodinový úhel* toho bodu.

Nakonec *azimutální souřadnice* jsou také polární souřadnice na nebeské sféře, které jsou však vztaženy na konkrétního pozorovatele, resp. pozorovací stanoviště. Azimut A se určuje podobně jako v zeměpisu, avšak směru s azimutem $A = 0^\circ$ odpovídá směr na jih (oproti zeměpisnému směru na sever). Druhou souřadnicí je pak výška nad místním matematickým horizontem h (horizont je přesně vodorovným směrem).



Obr. 1. Ekvatoreální souřadnice



Obr. 2. Ekliptikální souřadnice

Na zdánlivý pohyb Slunce po obloze mají vliv především rotace Země kolem své osy jednou za 23 hodin 56 minut a 4,09 vteřiny a oběh Země kolem Slunce jednou za rok (365,2524 stř. slunečního dne).

Za jedno otočení Země kolem své osy se Země zároveň posune asi o 1/365 své cesty po oběžné dráze stejným směrem, jako se sama točí, takže na obloze Slunce uteče přibližně o 1°. Země se proto musí mezi dvěma východy Slunce (anebo dvěma přechody místním poledníkem na pravé poledne) otočit asi o 361° a *sluneční den* tak trvá právě 24 hodin.

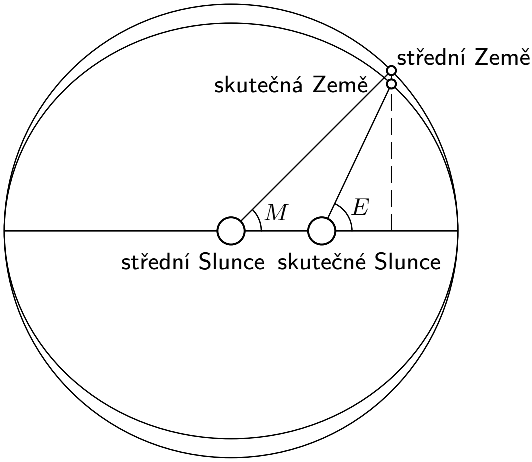
Země obíhá kolem Slunce po elipse s těžištěm soustavy v jejím ohnisku. Rychlost oběhu se v průběhu roku mění – čím blíž ke Slunci, tím rychlejší je oběh. Průměrnou úhlovou rychlost oběhu vypočítáme snadno jako $\omega = 360°/\text{rok}$.

A dále můžeme vypočítat jakýsi přibližný směr ke Slunci, neboli jakousi jeho střední polohu na ekliptice (ekliptikální délku středního Slunce), ze vztahu

$$\lambda_{\mathrm{s}} = \omega T_{\mathrm{r}} + \lambda_0 \,,$$

kde T_{r} je čas od posledního průchodu Země perihelem a λ_0 jeho ekliptikální délka v tomto čase (Země v periheliu 3. ledna řekněme o půlnoci, $\lambda_0 = 281{,}92°$). Díky nerovnoměrnému oběhu Země kolem Slunce skutečné Slunce na obloze střední Slunce někdy předbíhá a někdy za ním zaostává.

To má mimo jiné za následek také skutečnost, že pravé poledne nenastává přesně ve 12:00 místního středního slunečního času (pásmový čas s korekcí na zeměpisnou délku oproti poledníku, na kterém je pásmový čas počítaný). Rozdíl pravého slunečního času a středního slunečního času udává tzv. časová rovnice. Maximální časový rozdíl průchodu středního a skutečného Slunce rovinou místního poledníku je kolem 18 minut – to je také maximální chyba vhodně postavených slunečních hodin[1].



Obr. 3. Pravá (E) a střední (M) anomálie

Střední a skutečné Slunce se setkávají v den jarní rovnodennosti o 12:00 UT ($\lambda = 0°$). Vztah mezi ekliptikální délkou středního Slunce a skutečnou ekliptikální délkou λ je dán *Keplerovou rovnicí*

$$M = E - e \sin E\,,$$

kde $M = \lambda_s - \lambda_0 - \pi$ je tzv. střední anomálie, $E = \lambda - \lambda_0 - \pi$ tzv. pravá anomálie a e je excentricita zemské dráhy. Střední a pravá anomálie jsou směry od Slunce k tzv. střední Zemi (pohybující se rychlostí ω po kruhové dráze kolem Slunce) a skutečné Zemi.

Zajímavou vlastností této rovnice je, že ji nelze vyřešit analyticky. I přesto však existuje mnoho způsobů, jak najít E s dostatečnou přesností. Můžeme použít třeba iterativní metodu

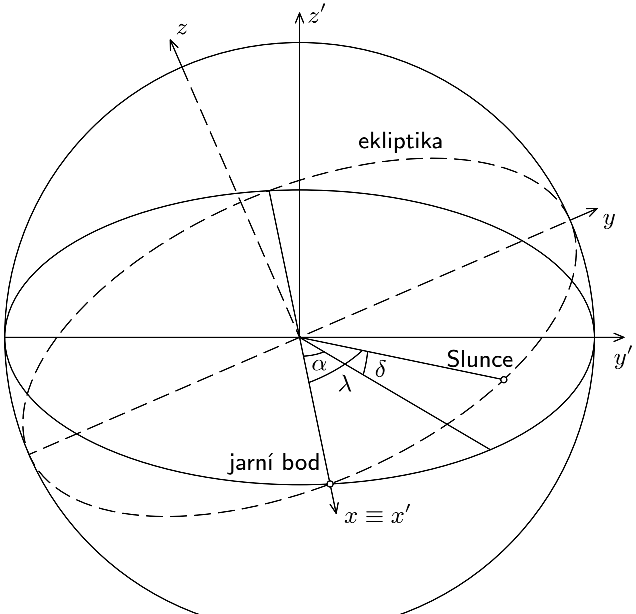
$$E_0 = 0\,, \qquad E_{i+1} = M + e \sin E_i\,.$$

Pro $i = 10$ už dává tato metoda docela přesné výsledky (i přitom můžeme libovolně zvyšovat, dokud $E_{i-1} - E_i$ není menší než maximální požadovaná chyba).

S pomocí výše uvedených vztahů můžeme v každém okamžiku vypočítat souřadnice Slunce na nebeské sféře. Známe ekliptikální délku λ a ekliptikální šířka je vždy nulová. Zbytek výpočtu je už pouze o transformaci souřadnic z jedné souřadné soustavy do druhé. Nejdříve provedeme transformaci z ekliptikálních do ekvatoreálních souřadnic, pak spočítáme místní hvězdný čas a hodinový úhel a nakonec dostaneme vztahy pro azimut a výšku Slunce pro místního pozorovatele. Známe-li, v jaké úhlové výšce h_o se nachází místní fyzický obzor v bodě, ve kterém Slunce vychází, resp. zapadá, můžeme z těchto vztahů zpětně vyjádřit časy východu a západu Slunce. Veličinu h_o už samozřejmě určíme měřením. Tím se vyhneme také všem zbytečným

[1] Z dob, kdy si mechanické hodiny mohli dovolit pouze bohatí profesoři a chudí studenti byli odkázáni na sluneční hodiny na náměstí, pochází také společensky zavedená maximální doba čekání na schůzku známá též jako akademická čtvrthodinka.

komplikacím se zakřivením Země, nadmořskou výškou atp., které někteří z vás v řešení uvažovali. A můžeme také měřit třeba východ Slunce nad střechu sousedova domu o deváté ráno místo skutečného času.



Obr. 4. Konverze z ekvatoreálních do ekliptických souřadnic přes kartézské

Podrobně předvedeme pouze prvou transformaci souřadnic. Zbylé se provádějí zcela analogicky. Chceme transformovat úhly λ a 0° udávající směr na jiné dva úhly α a δ. Všimneme si, že soustava ekvatoreálních souřadnic je oproti ekliptikálním souřadnicím pouze otočená o úhel ε kolem přímky dané spojnicí jarního a podzimního bodu (druhý průsečík rovníku a ekliptiky).

Ze směrů nejprve uděláme vektory v kartézském souřadném systému. Přidáme třetí souřadnici r a pro jednoduchost ji položíme rovnou 1. Vektor zadaný trojicí r, λ a ekliptikální šířkou v sobě obsahuje směr ke Slunci. Pak polární souřadnice převedeme na pravoúhlé kartézské. Osa z bude směřovat od pozorovatele k severnímu pólu ekliptiky, z-ová složka vektoru tedy bude $r \sin 0 = 0$. Položíme-li osu x od pozorovatele směrem k jarnímu bodu a osu y kolmo na předchozí dvě, bude transformace zbylých souřadnic snadná: $x = \cos\lambda$ a $y = \sin\lambda$. Otočíme teď vektor daný kartézskými souřadnicemi x, y a z v rovině (y, z) o úhel ε

$$
\begin{aligned}
x' &= x\,,\\
y' &= y\cos(-\varepsilon) - z\sin(-\varepsilon)\,,\\
z' &= y\sin(-\varepsilon) + z\cos(-\varepsilon)\,.
\end{aligned}
$$

Zbývá už jen převést vektor $[x', y', z']$ zpátky do polárních souřadnic

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}\,,$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \,.$$

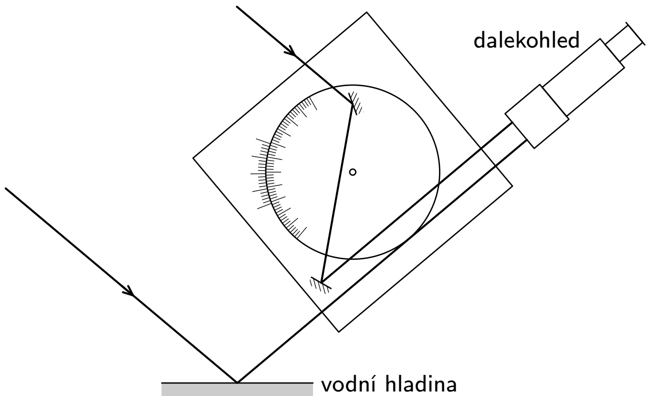
Při konverzi z ekvatoreálních do azimutálních souřadnic budeme potřebovat znát hodinový úhel ϑ a zeměpisnou šířku φ pozorovacího stanoviště. Rovina nebeského rovníku je oproti rovině horizontu skloněná o $90^\circ - \varphi$ (anebo pro pozorovatele na některém zeměpisném pólu splývá rovina rovníku s horizontem). Otáčet budeme tentokrát kolem osy směrující od západního k východnímu bodu o zmíněný úhel. Osa otáčení bude totožná s jednou z kartézských souřadnic. Zbylé dvě budou směrovat nejprve k světovému pólu a směrem s hodinovým úhlem 12 hodin v rovině rovníku a po otočení do zenitu a směrem k jižnímu bodu.

Po provedení výše zmíněných operací dostaneme následující vztah pro výšku Slunce nad obzorem

$$h = \operatorname{arctg} \frac{\cos\vartheta \sin(\varphi - 90^\circ) + \sin\delta \cos(\varphi - 90^\circ)}{\sqrt{\sin^2\vartheta + (\cos\vartheta\cos(\varphi - 90^\circ) - \sin\delta\sin(\varphi - 90^\circ))^2}} \,.$$

Postup měření

S tímto teoretickým podkladem můžeme přejít k samotnému měření. Na měření výšky Slunce nad obzorem jsme ze dvou disků CD, jednoho obalu na CD, pár kapek vteřinového lepidla a malého binokuláru zhotovili jednoduchý přístroj známý už několik století všem námořníkům pod jménem *sextant*[2].



Obr. 5. Měření výšky Slunce pomocí sextantu

Naše verze přístroje byla o něco jednodušší. Ve vektorovém grafickém editoru jsme si nakreslili vlastní stupnici s poněkud realističtějším rozlišením, namísto polopropustného zrcátka jsme použili pouze „zrcátko“ (vystřižené z druhého CD) s poloviční šířkou a obě zrcátka byla přidělaná přímo k otočnému CD se stupnicí, resp. k obalu. Nejtěžší část byla nastavit zrcátka přesně paralelně tak, aby při výchylce stupnice 0° byl pohled dalekohledem umístěným vedle obalu rozdělený na dvě vzájemně neposunuté půlky (odraz v zrcátku a přímý pohled). Pohled do dalekohledu (s objektivovým slunečním filtrem samozřejmě) při správné výchylce na sextantu vypadal tak, že půlka Slunce byla vidět v zrcátku a druhá neposunutá půlka přímo.

[2] Podrobný návod, jak takové zařízení postavit, najdete např. na adrese `http://www.tecepe.com.br/nav/CDSextantProject.htm`.

Normální použití sextantu počítá s využitím viditelné mořské hladiny. Moře v Praze bohužel není, takže jsme museli improvizovat. Vyrobili jsme si klidnou vodní hladinu a pak jsme měřili úhlovou vzdálenost Slunce od jeho odrazu na ní. Výška nad obzorem byla polovina tohoto úhlu. Výchylku jsme mohli pak odečíst na stupnici s vernierem, kterou jsme si vytiskli na dobré laserové tiskárně s přesností kolem $3'$. Skutečnou chybu měření odhadujeme asi na třetinu šířky slunečního disku, tj. asi na $10'$. Použití vodní hladiny jako reference vodorovného směru se příliš nehodilo pro měření výšky při východu, resp. západu Slunce. V těchto případech jsme proto měřili výšku Slunce přímo nad rovným horizontem.

Obr. 6. Konstrukce sextantu ze dvou CD

Výsledky měření

Dne 8. 2. 2008 jsme z Kolejí 17. listopadu ($50^\circ\,7'$ s.z.š, $14^\circ\,26'$ v.z.d.) pozorovali východ Slunce nad místní horizont v 7:32 místního pásmového času a západ Slunce v 16:59. Pozorovaná délka dne tedy byla 9 h 27 m. Časy východu a západu Slunce vypočtené výše uvedeným postupem byly 7:26, resp. 17:07. Rozdíl teoretické a pozorované délky dne byl tudíž asi 14 minut, hlavně díky nerovnému horizontu. V čase, kdy jsme pozorovali východ Slunce, se už mělo nacházet ve výšce $h_\mathrm{o} \doteq 0{,}9^\circ$. To nám dává první odhad na výšku východního horizontu.

Tento odhad pro tak malou výšku je však zkreslený. Chybu má na svědomí jev nazývaný atmosférická refrakce. Vypočtené hodnoty totiž nebraly v úvahu zemskou atmosféru. Světlo nebeských těles při své cestě k pozorovateli prochází vrstvou atmosféry s nenulovým a proměnným indexem lomu. Vrstva atmosféry je pro malé h velice tlustá, proto je i refrakce v této oblasti největší. Refrakci můžeme vypočítat např. pomocí tohoto přibližného empirického vzorce (dává výsledek v úhlových vteřinách)

$$R = \frac{1{,}02}{\operatorname{tg}\left(h + \frac{10{,}3}{h+5{,}11}\right)} \cdot \frac{P}{1010\,\mathrm{hPa}} \cdot \frac{283}{273 + T}\,,$$

kde P je tlak, T teplota a h vypočtená výška nad obzorem. Objekt pak pozorujeme ve výšce o hodnotu R větší než vypočtená. V následující tabulce je orientačně uvedená hodnota refrakce pro různé pozorované h při normálních podmínkách.

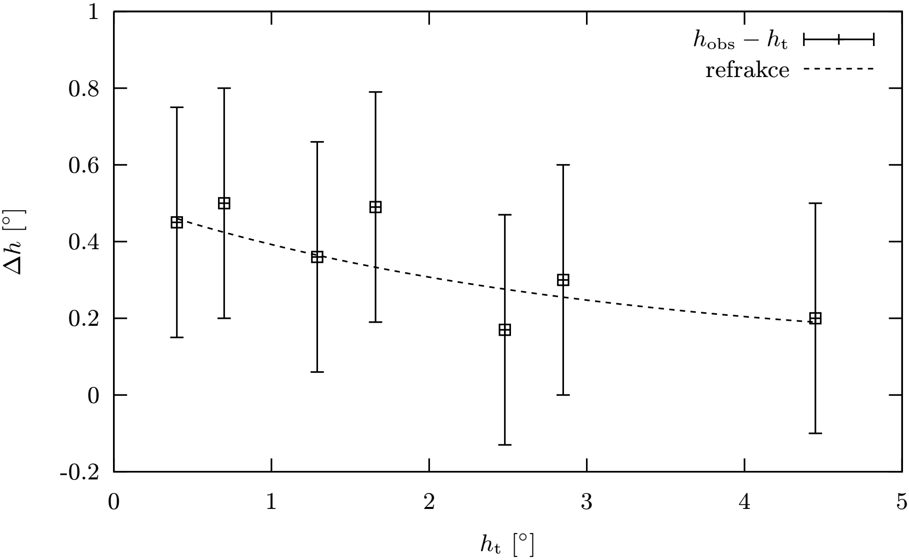
h [°]	0	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
R [′]	35	29	24	18	14	10	5	2,5	1,5	0,5

Průměr Slunce je asi 32′. Jelikož velikost refrakce v nulové výšce nad obzorem je větší než tato hodnota, můžeme na velmi rovném horizontu pozorovat východ celého Slunce nad horizont dříve, než je jednoduše předpovězený čas. Sluneční den by takto měl trvat o pár minut déle. Jak je však vidět z pozorování, je tato odchylka prakticky zanedbatelná vůči ostatním vlivům.

Dne 15. 2. jsme ze stejného pozorovacího stanoviště provedli následující sérii měření výšky Slunce nad místním horizontem.

t	7:17	7:20	7:24	7:26	7:32	7:35	7:40	7:46
h [°]	0	0,25	1	1,5	2	2,5	3	3,7

Použijeme-li první odhad výšky horizontu na určení skutečné výšky nad obzorem ($h_{\mathrm{obs}} = h + h_{\mathrm{o}}$) a porovnáme pozorovanou a vypočtenou výšku, najdeme závislost vynesenou v grafu 7.



Obr. 7. Porovnání rozdílu pozorované a vypočtené výšky Slunce s refrakcí

Jelikož pozorované rozdíly jsou příliš malé v porovnání s chybou, nedají se z těchto pozorování vyvodit jednoznačné závěry. Avšak posloupnost hodnot dává tušit pokles rozdílu teoretické a pozorované výšky Slunce, který odpovídá průběhu refrakce.

Měření výšky Slunce kolem poledne počasí v době psaní tohoto textu příliš nepřálo. Čas, kdy výška Slunce dosahuje maxima, teoreticky spočítáme tak, že výšku $h(t)$ derivujeme podle času a položíme rovnou nule. Výšku Slunce nad obzorem ale můžeme jednodušeji určit podle přibližného vzorce

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta\,, \qquad (1)$$

kde δ je deklinace Slunce v daný den a φ zeměpisná šířka.

Uskutečnili jsme pouze jedno krátké měření dne 9. 2. 2008 ve 12:20. Vypočtený čas kulminace pro dané datum byl $t_{\rm max} = 12{:}13$ SEČ. Naměřená výška $h = 25^\circ\,20' \pm 10'$ byla ve výborné shodě s vypočtenou $h_{\rm t} = 25^\circ 23'$. Refrakce ve výškách kolem 30° je už hluboko pod chybou měření a výška Slunce se kolem poledne mění velice pomalu, takže na těch pár minutách také nesešlo.

Poznámky k došlým řešením

Závěrem ještě pár slov k došlým řešením. Co se teoretické části týče, jen málo z vás se zamyslelo nad tím, jak to s pohybem Slunce po obloze vlastně je. Světlou výjimkou byla např. *Zuzana Dočekalová*. *Tereza Jeřábková* a *Veronika Paštyková* se pokusily navrhnout jednodušší metodu na výpočet délky dne. To lze učinit, pokud budeme pokládat deklinaci Slunce v průběhu dne za konstantní a zastavíme Zemi na její dráze v jednom bodě. Odchylka oproti přesnému výpočtu by byla při správném provedení docela malá. Celkem zdařilá řešení došla také od *Karla Koláře* či *Petra Vanyu*.

Mnoho řešitelů spoléhalo na udávané časy východu či západu Slunce z předpovědi počasí. Často však bez toho, aby si uvědomili, jak tento čas opravit na geografickou polohu svého stanoviště. Vzhledem k tomu, že tyto časy jsou v ČR nejčastěji udávané pro polohu Prahy, mohou se místní časy lišit až o téměř 20 minut (na stejné zeměpisné šířce vyjde Slunce o 4 minuty dřív na každý stupeň délky směrem na východ). Už jednoduché použití vzorce (1) pro výpočet maximální úhlové výšky Slunce bylo hodnoceno 2 body. Naopak neuvedení základních údajů, jako jsou poloha pozorovacího stanoviště, či dokonce ani datum pozorování, se odrazilo na bodovém počtu negativně.

V praktické části této úlohy řešitelé také projevili až překvapivě málo fantazie. Téměř výlučně používané metody na měření výšky Slunce byly měření délky stínu anebo ukazovátko přidělané na úhloměru. I při nejlepší vůli není přesnost všech popsaných pokusů lepší než asi jeden až dva stupně[3]. To je ovšem na většinu praktických aplikací žalostně málo.

Asi nejjednodušší možné měření by bylo měření částmi ruky. Když člověk natáhne ruku před sebe a roztáhne prsty, tak vzdálenost od konce palce po konec malíčku je 20–23°. Šířka sevřené pěsti je asi 10° a šířka palce přibližně 2°. Změřit úhlovou vzdálenost Slunce od obzoru touto metodou by možná bylo v některých případech přesnější (než došlé výsledky).

Peter Greškovič
`grepe@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[3] S tím také souvisí jedna často opakovaná nepřesnost – když je chyba 2°, neudáváme výsledek na tři desetinná místa!