21. ročník, úloha III . 4 ... *částice na poli* *(4 body; průměr 2,31; řešilo 26 studentů)*

Mějme elektrostatické pole neměnné v čase. Do toho pole vkládáme na stejné místo nabitou částici s nulovou počáteční rychlostí. Pečlivě sledujeme, jak se částice pohybuje, a zaznamenáváme si její trajektorii. A co nás překvapí – trajektorie částice nezávisí na její hmotnosti. Dokážete to vysvětlit? *Na problém narazil Marek Scholz při programování zápočťáku.*

Uvedeme si dva různé způsoby řešení problému. Zkoumáme pohyb hmotné nabité částice v elektrostatickém poli. Všechny ostatní síly kromě elektrostatické zanedbáme. Toto pole je v čase neměnné, ale bod od bodu se může měnit, tedy každému bodu uvažovaného prostoru je přiřazen nějaký vektor elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$, který charakterizuje pole.

Zobecněme zadání a uvažujme, že zkoumané částice mají kromě různé hmotnosti i různý náboj. Síla působící na nabitou částici v elektrostatickém poli je rovna výrazu $q\boldsymbol{E}$, kde q je velikost náboje částice. Každému bodu prostoru lze rovněž přiřadit elektrostatický potenciál φ. Vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ přímo souvisí s potenciálem vztahem

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi\,,$$

tedy intenzita míří směrem největšího spádu potenciálu a její velikost závisí na prudkosti tohoto spádu. Potenciální energie[1] částice v poli pak bude rovna $V = q\varphi$, přičemž V má význam práce potřebné k přenesení částice z „nekonečna“ do konkrétního bodu. Když se částice pohybuje pouze pod vlivem našeho pole, bude přírůstek její kinetické energie přesně roven úbytku potenciální energie. Mějme dvě rozdílné částice s náboji q, q' a hmotnostmi m, m'. Pokud částice startují z klidu ze stejného místa, jsou jejich kinetické energie T, T' v určitém bodě rovny úbytku potenciální energie, tedy

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = q\Delta\varphi\,,\quad T' = \tfrac{1}{2}m'{v'}^2 = q'\Delta\varphi\,, \tag{1}$$

kde $\Delta\varphi$ značí úbytek potenciálu mezi startovním a aktuálním bodem. Lze tudíž psát

$$mv^2 = 2q\Delta\varphi\,,\quad m'{v'}^2 = 2q'\Delta\varphi\,, \tag{2}$$

což se nám bude hodit dále.

Trajektorie částice je obecně zakřivená a každou malou část dráhy lze považovat za část kružnice, která má určitý poloměr. Tento poloměr se nazývá poloměr křivosti trajektorie v daném bodě. Směr rychlosti vždy míří ve směru tečny k trajektorii. Předpokládejme nyní, že dvě rozdílné částice nábojů q, q' a hmotností m, m' jsou v určité fázi pohybu na stejném místě a mají stejný směr rychlosti (nikoli velikost). Jejich kinetické energie jsou dány rovnicemi (1).

Pole působící v tomto místě lze rozložit na složku $E_\perp$ kolmou k rychlosti a složku rovnoběžnou $E_\parallel$. Poloměr křivosti v tomto bodě označme R. Aby se částice pohybovala po kružnici s poloměrem R, musí na ni působit dostředivé zrychlení $a_\mathrm{d} = v^2/R$. Toto dostředivé zrychlení způsobuje síla působící ve směru do středu kružnice, tedy ve směru kolmém na pohyb. Pro zmíněnou sílu ale zřejmě platí

$$F_\perp = qE_\perp = ma_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{R}\,. \tag{3}$$

[1] Energii nebudeme značit E, ale V, aby se nepletla s elektrickou intenzitou.

Vyjádříme R a posléze dosadíme z (2) a máme

$$R = \frac{mv^2}{qE_\perp} = \frac{2q\Delta\varphi}{qE_\perp} = \frac{2\Delta\varphi}{E_\perp}\,.$$

Sláva! Poloměr křivosti dráhy nezávisí na hmotnosti částice ani na jejím náboji a poslední vztah vyjde naprosto stejně i pro jinou částici s hmotností m' a nábojem q'. Pokud tedy naše dvě porovnávané částice mají v určitém místě kinetickou energii danou vztahem (1) a stejný směr rychlosti, pak mají v tomto místě i shodný poloměr křivosti trajektorie.

Ježto ale mají trajektorie stejný poloměr křivosti v jednom bodě, a letí tudíž jakoby po stejné kružnici, blízký bod na této kružnici bude prvkem obou trajektorií a v onom blízkém bodě budou mít obě částice opět stejný směr rychlosti a kinetické energie určené vztahem (1). Předešlou úvahu mohu opakovat až donekonečna a navíc na počátku, kdy jsou částice v klidu, mají částice opravdu shodný směr rychlosti a shodnou nulovou kinetickou energii. Z toho vyplývá, že trajektorie obou rozdílných částic mají ve všech bodech stejný poloměr křivosti, a jsou proto opravdu shodné. Použili jsme v podstatě metodu matematické indukce, přičemž indukční krok zmenšujeme donekonečna.

Povšimněme si, že v provedené „indukční“ úvaze nemusíme nutně uvažovat, že kinetické energie jsou určeny vztahem (1). Stačí, když jsou v poměru $T/T' = q/q'$. To je obecnější předpoklad. Dospějeme tak k závěru, že trajektorie dvou rozdílných částic se shodují, pokud má jejich počáteční rychlost stejný směr a počáteční kinetické energie jsou v poměru $T/T' = (mv^2)/(m'v'^2) = q/q'$. Vyjádříme-li z této rovnosti rychlost $\boldsymbol{v}$, dostáváme

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'\sqrt{\frac{m'}{m}\cdot\frac{q}{q'}}\,. \tag{4}$$

Opět z provedené úvahy plyne, že poměr T/T' bude stejný pro všechny body trajektorie stejně tak jako poměr rychlostí. Shrnuto, částice letí po stejných trajektoriích různými rychlostmi, jejichž poměr je dán rovnicí (4).

Naší „indukční“ úvahy jsme se mohli však ušetřit. Uvažujme takto: jednu částici necháme pohybovat se v poli. Její trajektorie má v každém bodě určitý poloměr křivosti, tedy v každém bodě působila síla zapřičiňující toto zakřivení. Dejme tomu, že by se druhá částice pohybovala po stejné trajektorii. Byly by síly působící na částici opět takové, že by poloměr křivosti v každém bodě odpovídal působící síle? Na základě vztahu (3) odpovíme ano. Myšlené trajektorii tedy jakoby nelze nic vytknout, odpovídá všem působícím silám, a bude to tedy ta skutečně realizovaná.

Někteří z vás argumentovali tím, že částice letí po siločarách. Povězme si, proč tomu tak v obecném případě není. Siločára je křivka, jejíž tečna v každém bodě je rovnoběžná se směrem intenzity $\boldsymbol{E}$. Pokud ale částice letí po zakřivené siločáře, musí na ni působit určitá dostředivá síla kolmá na rychlost, a tedy i kolmá na tečnu k siločáře. Taková kolmá síla tu ale není, protože elektrická síla míří ve směru tečny.

Prozkoumejme nyní trochu odlišný, docela elegantní způsob řešení. Částice se samozřejmě bude řídit pohybovou rovnicí

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}\,.$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ a síla $\boldsymbol{F}$ jsou zde vektory. Takový vektorový zápis není nic objevného, uvedená rovnice pouze skrývá tři rovnice – pro každou ze složek x, y, z zrychlení a síly jednu rovnici.

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ však můžeme lépe zapsat jako

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\,, \tag{5}$$

tedy jako druhou derivaci polohového vektoru částice[2]. Pohybová rovnice částice v našem elektrostatickém poli proto je

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,. \tag{6}$$

Intenzita pole závisí samozřejmě na poloze, tedy zrychlení částice v určitém bodě závisí na intenzitě v tomto konkrétním bodě.

Zamysleme se nyní nad tím, jak se pohybová rovnice změní, pokud budeme čas měřit v jinak dlouhých jednotkách, než jsou vteřiny, nebo jednoduše na hodinkách, které běží třeba pomaleji. Nové časové jednotce budeme říkat třeba pseudovteřina se značkou σ. Dejme tomu, že počet časových jednotek τ zaznamenaný na našich zpomalených hodinkách souvisí s časem t měřeným v sekundách vztahem

$$t = k\tau\,, \quad \text{tedy} \quad \tau = \frac{t}{k}\,. \tag{7}$$

Jak se projeví použití těchto nových jednotek při měření zrychlení? Když měříme rychlost pomocí pomaleji běžících hodinek, bude číselně větší, konkrétně k-krát větší, protože ke změně polohy stačilo méně časových jednotek. Zrychlení měříme porovnáním rychlostí v blízkých okamžicích a opět při měření času v pseudovteřinách bude ke změně rychlosti třeba méně časových jednotek a zrychlení vyjde číselně k-krát větší. Ale již rychlost vyšla k-krát větší a z této větší rychlosti teprve počítáme zrychlení a dostáváme tak převodní vztah mezi číselnými hodnotami zrychlení při použití různých časových jednotek

$$a[\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}] = k^2 a[\,\mathrm{m{\cdot}}\sigma^{-2}]\,.$$

Tento vztah dobře vyplyne i formálním dosazením z (7) do (5)

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}(k\tau)^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2}\,. \tag{8}$$

Jedná se zde však o derivace a ne o pouhé zlomky a tak by se nám uvedená úprava měla určitě zdát trochu podezřelá, nicméně v tomto případě je korektní.[3]

Teď pomocí vztahu (8) přepíšeme pohybovou rovnici (6), tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = k^2\frac{q}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,.$$

Všimněme si ale nyní klíčové myšlenky. Pokud zavedeme zrovna takové pseudovteřiny a budeme mít takové hodinky, že faktor $k = \sqrt{m/q}$, potom lze pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

---

[2] Časová změna polohy je rychlost a časová změna rychlosti je zrychlení.

[3] Napsal jsem krátkou stať o druhé derivaci složené funkce, koho to zajímá, na požádání zašlu.

a zde se již nevyskytuje náboj ani hmotnost!

Vezměme si teď druhou částici s nábojem q' a hmotností m', jejíž polohu budeme značit polohovým vektorem $\boldsymbol{r}'$. Její pohybová rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q'}{m'}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\,.$$

I tuto rovnici ale můžeme napsat jinak, když budeme čas měřit namísto v sekundách v jiných jednotkách σ' a vztah mezi časy t a τ' bude dán faktorem $k' = \sqrt{m'/q'}$.[4] Vztah mezi τ a τ' je potom zřejmě

$$\tau = K\tau'\,, \quad \text{kde} \quad K = \sqrt{\frac{m'}{q'}\cdot\frac{q}{m}}\,. \tag{10}$$

Pohybová rovnice při užití jiných časových jednotek σ' nabývá tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau'^2} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

a pohybové rovnice obou částic mají teď úplně stejný tvar! Pohybová rovnice (9), což je diferenciální rovnice druhého řádu, určuje spolu s počáteční polohou a rychlostí závislost polohy $\boldsymbol{r}$ na čase τ.

Pokud ale $\boldsymbol{r}(\tau = 0) = \boldsymbol{r}'(\tau' = 0)$ a rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}(\tau = 0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau'}(\tau' = 0)\,,$$

což je při stejné počáteční poloze a nulové počáteční rychlosti splněno, pak pohyb první i druhé částice jsou určeny naprosto stejnými rovnicemi jen s tím rozdílem, že používáme pro čas jiné písmenko, a proto i řešení, tedy funkce $\boldsymbol{r}(\tau)$, resp. $\boldsymbol{r}(\tau')$ budou v obou případech naprosto shodná až na to, že jednou budeme v řešení psát τ a podruhé τ'. Množiny bodů, kterými částice projdou, tedy jejich trajektorie budou v obou případech shodné.

Částice budou pouze dráhu procházet rozdílnou rychlostí. Ve všech bodech trajektorie bude platit

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau'}$$

a díky vztahu (10) platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} = K\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

takže podíl rychlostí (které již měříme ve stejných jednotkách) čárkované a nečárkované částice je K.

Všimněme si ještě, že podmínka na shodnost trajektorií

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}(\tau = 0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau'}(\tau' = 0) = K\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau}(\tau = 0)$$

je splněna, pokud jsou rychlosti v poměru K, tedy počáteční rychlost nemusí být nutně nulová. Když mají obě částice stejný náboj, potom podle (10) $K = \sqrt{m'/m}$. Počáteční kinetická

4) Zde už jsou nové časové jednotky σ' samozřejmě jiné než pseudovteřiny σ v předešlém výkladu.

energie T (vyjádřená ovšem ne v joulech, ale v pseudojoulech, protože jinak měříme čas) první částice je pak

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} m' \left(K \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} m' \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 ,$$

a kinetické energie obou částic se tedy rovnají po celou dobu pohybu a rovnost počátečních kinetických energií je zřejmě podmínkou pro shodnost trajektorií. Patrně jsme tedy dospěli k naprosto stejným závěrům jako při prvním způsobu řešení.

Možná se vám zdá, že to není pořádný důkaz, když jsme jenom derivovali, a fyzika v podstatě žádná. Je třeba si ale uvědomit, že *2. Newtonův zákon* formulovaný v diferenciálním tvaru je zcela fundamentální zákon klasické fyziky a podle vší zkušenosti řešení pohybové rovnice jakožto rovnice diferenciální opravdu odpovídá skutečně realizovanému pohybu. Věříme, že diferenciální rovnice správně popisují náš svět, a proto i zde určitý fyzikální jev vysvětlujeme na základě matematické úpravy diferenciální rovnice.

Někteří z vás uvažovali kromě elektrické i gravitační sílu. Trajektorie různých částic v tom případě již shodné nebudou. Oba uvedené důkazy podle očekávání selžou. Rozmyslete si proč.

Mezi vašimi řešeními se vyskytly i jinak pojaté důkazy než uvedené. Například *Michal Maixner* uvažoval, že pole lze rozdělit na velmi malé oblasti, přičemž v rámci oblasti je všude v podstatě stejná intenzita $\boldsymbol{E}$, *Tereza Steinhartová* zmínila užitečnost principu nejmenší akce a *Hana Šírová* měla zase moc pěkně zpracovaný druhý z uvedených způsobů řešení.

Marek Scholz
`mara@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.