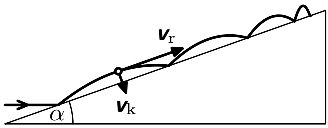
21. ročník, úloha III . 3 ... *hopsání po nakloněné rovině* *(4 body; průměr 2,17; řešilo 29 studentů)*

Malou kuličku hodíme vodorovně na nakloněnou rovinu. Kulička po ní začne poskakovat a po N odrazech dopadne kolmo k povrchu nakloněné roviny (viz obr. 1). Jaký je úhel α nakloněné roviny? Předpokládejte, že se kulička odráží dokonale pružně, rotaci kuličky neuvažujte.

S kuličkami si rád hraje Pavel Motloch.



Obr. 1. Příklad trajektorie kuličky pro $N = 4$

Pohyb kuličky lze rozložit do dvou směrů – kolmého na rovinu a rovnoběžného s rovinou. Ve shodě s tímto pojmenováním budeme nadále používat indexy k a r. Kulička se odráží dokonale pružně a tedy odraz nijak nezmění hodnotu v_r a v případě v_k pouze změní znaménko. Ve směru kolmém pohyb mezi dvěma odrazy popisuje rovnice

$$v_\mathrm{k} = v \sin\alpha - g\cos\alpha t\,.$$

Nyní spočteme periodu skoku, tedy časový interval mezi dvěma dopady (tj. dvojnásobkem doby, pro které platí $v_\mathrm{k} = 0$).

$$t_\mathrm{s} = \frac{2v}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Pohyb ve směru rovnoběžném popisuje rovnice

$$v_\mathrm{r} = v\cos\alpha - g\sin\alpha t\,.$$

Kulička dopadne na rovinu kolmo, pokud bude v okamžiku dopadu rovnoběžná složka rychlosti nulová. To nastane právě v čase

$$t_N = \frac{v}{g}\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,.$$

Aby situace nastala v okamžiku N-tého odrazu, musí platit $t_N = N t_\mathrm{s}$, odkud s použitím předchozích rovností získáme

$$\frac{v}{g}\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{2Nv}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,$$

z čehož pro hledaný sklon roviny máme

$$\alpha = \mathrm{arccotg}\,\sqrt{2N}\,.$$

To je hledaný sklon nakloněné roviny, při kterém na ni kulička dopadne kolmo, ale až poté, co se od ní předtím $(N-1)$-krát odrazí.

Jan Jelínek
`jjan@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.