21. ročník, úloha III . 2 ... výtah až do nebe *(4 body; průměr 1,86; řešilo 28 studentů)*

Určete, jaké fyzikální vlastnosti musí mít materiál závěsného lana výtahu, který spojuje povrch Země a oběžnou geostacionární dráhu. Je vůbec takový materiál na Zemi dostupný?

Nad efektivním dopravníkem do kosmu se zasnil Aleš Podolník.

Nejdříve se zamyslíme nad hlavní myšlenkou vesmírného výtahu. Pro určitou výšku nad zemským povrchem platí, že těleso v ní obíhající po kruhové dráze bude mít oběžnou dobu rovnou jednomu dni (geosynchronní oběžná dráha). Tedy jeho úhlová rychlost bude stejná jako úhlová rychlost otáčení Země ω. Výšku této dráhy spočteme z rovnosti odstředivé a gravitační síly.

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}\,, \tag{1}$$

kde G je gravitační konstanta a M hmotnost Země. Číselně je $R = 35\,800\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země. Je-li navíc tato oběžná dráha v rovině rovníku, nazývá se geostacionární a obíhající satelit se na ní vůči povrchu Země nepohybuje. Je proto lákavé spojit toto místo s odpovídajícím místem na rovníku. Pravděpodobně prvním, kdo o tom uvažoval, byl Konstantin Ciolkovskij, myšlenku potom zpopularizoval A. C. Clarke v románu Rajské fontány.

Bohužel 35 800 km lana nestačí, takto krátké by spadlo na zem, protože se jeho těžiště nachází pod geostacionární dráhou. Musí se proto uvažovat buď s lanem delším, nebo s vynesením dodatečného závaží na vyšší oběžnou dráhu, které bude lano napínat. My dále budeme uvažovat první možnost.

Další věc je, jak lano bude vypadat. Ve skutečnosti nepůjde o výtah v pravém slova smyslu, protože kabina nebude lanem vytahovaná, nýbrž po něm bude šplhat vzhůru vlastními silami. Z různých dalších důvodů (např. minimalizování pravděpodobnosti srážky s vesmírným smetím) se ukazuje jako nejlepší tvar dlouhá tenká stuha[1]). Dále se však ukáže, že např. napětí v laně nezávisí na jeho průřezu.

Jaká je podmínka pro to, aby lano vlastními silami vydrželo na geostacionární oběžné dráze? Stejně jako pro bodový satelit musí platit, že výsledná síla v neinerciální soustavě spojené s lanem musí být nulová. Tedy odstředivá síla způsobená otáčením Země musí vyrovnat gravitační sílu. Vypočítejme tedy délku H lana, pro kterou to platí. Na element lana $\mathrm{d}m$ působí gravitační a odstředivá síla

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F_\mathrm{o} - \mathrm{d}F_\mathrm{g} = \mathrm{d}m r\omega^2 - G\,\frac{\mathrm{d}mM}{r^2}\,. \tag{2}$$

Víme, že $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}r$, kde σ je délková hustota lana. Celkovou působící sílu získáme integrováním vztahu (2) přes celou délku lana (od povrchu Země do hledané výšky H). Jak jsme dříve zmínili, tato síla musí být nulová. V integrálu jsou elementární funkce, takže jej nebude problém vypočítat.

$$\int_{R_\mathrm{Z}}^{H}\left(G\frac{\sigma M}{r^2} - \sigma\omega^2 r\right)\mathrm{d}r = 0\,,$$

$$G\sigma M\left(-\frac{1}{H} + \frac{1}{R_\mathrm{Z}}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}\left(H^2 - R_\mathrm{Z}^2\right) = 0\,. \tag{3}$$

[1]) Viz například `http://www.spaceelevator.com/`.

Podělíme-li rovnici členem $\sigma\omega^2/2$, u levé závorky dostaneme $2R^3$ (výšku geostacionární oběžné dráhy, jak jsme vypočítali v (1)). Rozepsáním závorek poté vyjde kubická rovnice

$$H^3 R_\mathrm{Z} - H\left(R_\mathrm{Z}^3 + 2R^3\right) + 2R^3 R_\mathrm{Z} = 0\,, \tag{4}$$

jejíž jeden kořen se dá uhodnout ($H = R_\mathrm{Z}$; v laně nulové délky se kupodivu odstředivá a gravitační síla vyrovnají) a zbylé dva dostaneme řešením kvadratické rovnice. Uvažujeme pouze ten s kladnou odmocninou z diskriminantu, protože ten druhý vyjde záporně.

$$H = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R_\mathrm{Z}^2 + \frac{8R^3}{R_\mathrm{Z}}} - R_\mathrm{Z}\right). \tag{5}$$

Dosadíme-li již dříve vypočítané veličiny a konstanty, vyjde $H \approx 150 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, což je skoro polovina vzdálenosti k Měsíci, ale tím se zatěžovat nebudeme.

Teď přejdeme k hlavní části úlohy. Musíme vypočítat průběh normálového napětí v laně v závislosti na výšce (počítáné od středu Země). K výsledku se dostaneme podobně jako v předchozím případě. Síla napínající lano bude celková síla působící na spodní část lana.

$$F(h) = \int_{R_\mathrm{Z}}^{h} (\mathrm{d}F_\mathrm{o} - \mathrm{d}F_\mathrm{g})\,.$$

Pomocí vztahu uvedeného v (2) zapíšeme konkrétní síly a integrujeme stejně jako při počítání délky lana.

$$F(h) = G\sigma M\left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{h}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(h^2 - R_\mathrm{Z}^2)\,. \tag{6}$$

Musíme najít extrém této funkce, tedy položíme první derivaci podle h rovnou nule,

$$-\frac{GM\sigma}{h^2} + h\sigma\omega^2 = 0\,.$$

Je to opět kubická rovnice, jejíž jeden kořen uhodneme – derivace $F(h)$ je nulová pro $h = R$. Zbylé dva kořeny jsou imaginární a nezajímají nás. Průběh napínající síly je znázorněn na obrázku 1.

Velikost maximální napínající síly tedy bude (dosazení $h = R$ do $F(h)$)

$$F_\mathrm{max} = \sigma GM\left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_\mathrm{Z}^2)\,.$$

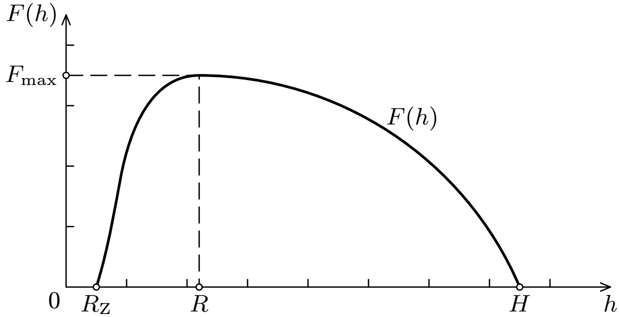
Využijeme-li souvislosti délkové hustoty σ s objemovou hustotou ϱ ($\sigma = \varrho S$, kde S je průřez lana), dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_n = \frac{F_\mathrm{max}}{S} &= \frac{\sigma}{S}\left|GM\left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_\mathrm{Z}^2)\right| = \\ &= \varrho\left|GM\left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_\mathrm{Z}^2)\right|\,.\end{aligned}$$

Napětí opravdu nezávisí na průřezu lana a po vyčíslení je $\sigma_n = \varrho \cdot 4{,}84 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa{\cdot}m^3{\cdot}kg^{-1}}$.

Nyní se dostáváme k jednomu menšímu problému. Zanedbali jsme totiž, že se lano vlastní tíhou natahuje, a tudíž se mění jeho hustota v závislosti na délce. (A to opačně než působící síla. Tam, kde bude $F(h)$ největší, bude hustota nejmenší a naopak.) Ale pokud bude mít materiál dostatečně velký modul pružnosti v tahu, protáhne se jen minimálně a zanedbání bude oprávněné. V integrálech pro výpočet působících sil bychom museli tuto závislost zohlednit a to by nebylo jednoduché. Spokojíme se s tím, že maximální dovolené normálové napětí v laně je přímo úměrné hustotě materiálu a konstanta úměrnosti je asi $5 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa{\cdot}m^3{\cdot}kg^{-1}}$.

Jaké materiály tuto podmínku splňují? Snadno ověříme (a řada řešitelů to i provedla), že žádná běžná látka by neobstála. Jedinou světlou nadějí je lano z uhlíkových nanotrubek, jehož hustota je asi $1350\,\mathrm{kg{\cdot}m^3}$, a tedy $\sigma_n = 65\,\mathrm{GPa}$. Jejich teoretická mez pevnosti je asi dvakrát větší, tudíž nám to dává naději do budoucna (zatím dokážeme vyrábět pouze krátké trubičky, lano z nich stále čeká na vynálezce).



Obr. 1. Graf závislosti síly na výšce

Další vlastnosti materiálu jako tepelná roztažnost, odolnost vůči povětrnostním vlivům a další se projeví jenom na malém úseku lana (v atmosféře), a tak jejich silové účinky můžeme zanedbat. Problémem by mohla být pouze skutečnost, že se vzdáleností od Země klesá elektrický potenciál a takovéto lano by bylo jedním velkým hromosvodem. Základna výtahu by tak měla být někde, kde se moc neblýská, a lano ošetřeno, aby mu zásah bleskem moc neuškodil. Nicméně jakákoliv ochrana proti bleskům by byla potřeba jen v nízkých výškách, a tak se hmotnost lana příliš nezvětší.

Jak a jestli vůbec takovouto konstrukci postavit, necháme na rozmyšlení čtenáři a dál pak strýčku Samovi.

Ve vašich řešeních se vyskytly dva problémy. Buď jste neprovedli téměř žádné výpočty a úvahy pak neměli čím podložit, nebo jste zapomněli na to, že lano musí něco napínat, a sílu počítali rovnou na geostacionární dráze.

Aleš Podolník
`ales@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.