**21. ročník, úloha II . 4 ... *nabitá anténa*** *(5 bodů; průměr 1,64; řešilo 22 studentů)*

*Dva stejné náboje umístíme na oba konce tuhé nevodivé tyčky. Jaký výkon budeme potřebovat na otáčení tyčky konstantní úhlovou rychlostí kolem osy procházející středem tyčky? Tření zanedbejte.* *Úlohu vymyslel Martin Výška.*

V průběhu řešení užíváme následující symboly: $R$ označuje polovinu délky tyčky, a tedy poloměr kružnice, po které se oba náboje pohybují, $\omega$ značí úhlovou rychlost otáčení tyče, $q$ budeme značit velikost obou nábojů. Co se týče fundamentálních konstant, volíme tradičně $c$ jako velikost rychlosti světla ve vakuu a $\varepsilon_0$ permitivitu vakua.

Jak bylo uvedeno v zadání, tyčka spojující oba náboje je nevodivá a nehmotná. To znamená, že se v příkladu projevuje pouze jako mechanismus udržující náboje na kruhové trajektorii a nijak ji do našich úvah nemusíme zahrnovat. Tato idealizace byla zvolena proto, abychom se nemuseli zabývat konkrétními detaily souvisejícími s realizací takovéhoto uskupení, ale mohli se soustředit zcela na elektromagnetickou stránku věci. To bychom měli pár slov na úvod, vrhněme se na řešení!

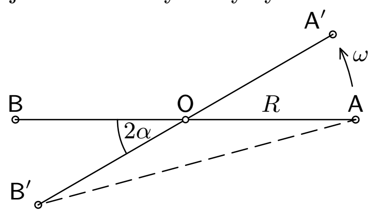
Jak nás učí teorie relativity, žádný „reálný objekt“ se nemůže v prostoru pohybovat rychlostí větší, než je rychlost světla ve vakuu. Pro řešení úlohy stačí vědět, že elektromagnetické pole takovým objektem je (např. proto, že nese energii a hybnost).

Uvažujme nyní následující model silového působení mezi dvěma náboji. Každý z nábojů vysílá v každém okamžiku do prostoru informaci o své poloze a rychlosti (signál) a tato informace se prostorem šíří konečnou rychlostí. Když potom jeden náboj zachytí signál pocházející od druhého náboje, tak si jej „zpracuje“ a na základě informací v tomto signálu obsažených se začne pohybovat (jak, o tom za chvíli). Tento model má své zjevné „mouchy“, ale v základě správně vystihuje podstatu probíraného působení, především tu následující.

Každou informaci, kterou jeden náboj vyšle, přijme vzhledem ke konečné rychlosti šíření signálu druhý náboj se zpožděním. Protože se ale během doby, kdy signál putoval prostorem, mohl zdrojový náboj pohybovat, jsou informace, které má cílový náboj k dispozici, „zastaralé“. Jinak řečeno, cílový náboj se chová tak, jako by se zdrojový náboj v okamžiku příjmu signálu nenacházel tam, kde se skutečně nachází, ale tam, kde se nacházel v okamžiku vyslání signálu[1].

Síla působící na náboj není kolmá k jeho rychlosti, neboť jak jsme ukázali, než se jeden náboj dozví o tom, že na něj z toho a toho místa působí druhý náboj silou, tak se celá soustava stihne během šíření signálu ještě o kousek pootočit. Tím se nepatrně změní úhel mezi působící silou a rychlostí náboje, vektory síly a rychlosti potom již nejsou kolmé a výsledný výkon není nulový.

První věcí, kterou ve svém řešení musíme zjistit, je velikost úhlu $2\alpha$, o který se celá soustava otočí v době mezi vysláním signálu z prvního náboje a zpracováním signálu druhým nábojem. Pro lepší názornost si celou situaci znázorněme graficky (viz obr. 1). Vodorovná pozice tyčky odpovídá okamžiku vyslání signálu, šikmá okamžiku příjmu signálu.



Obr. 1. Otočení tyčky během šíření signálu

Jelikož se celá soustava otáčí rovnoměrně, bude se signál šířit po čas $2\alpha/\omega$. V tomto čase urazí signál rychlostí $c$

[1]) Toto je místo, kde udělala chybu velká část řešitelů, neboť předpokládali, že se silové působení mezi náboji přenáší nekonečně velkou rychlostí. V takovém případě by byla síla působící na náboj kolmá k jeho rychlosti a výsledný výkon elektrických sil by byl nulový.

vzdálenost mezi místy vyslání a příjmu signálu; tato místa jsou na obrázku znázorněna body A a B′. Z obrázku je patrné, že se jedná o délku základny rovnoramenného trojúhelníka o ramenech délky $R$ a s vrcholovým úhlem $\pi - 2\alpha$, tedy o vzdálenost $2R\cos\alpha$. Srovnáním obou časů dospíváme k rovnici o jedné neznámé $\alpha$,

$$\frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2R\cos\alpha}{c}\,.$$

Pro tuto rovnici bohužel nedokážeme najít obecné řešení (rozuměj funkci několika proměnných, do které bychom dosadili hodnoty parametrů $v$, $c$ a získali bychom řešení). To by v případě komplikovanějších navazujících výpočtů mohlo představovat problém, nicméně v tomto případě získaná rovnice plně postačuje. Pokud by nás totiž zajímala hodnota řešení pro nějaký konkrétní případ, můžeme do dané rovnice dosadit a vyřešit ji numericky nebo pomocí mocninného rozvoje (pro malé rychlosti otáčení můžeme funkci kosinus rozvinout do několika prvních členů Taylorova polynomu, čímž obdržíme přijatelnou polynomiální rovnici). Nám bude plně postačovat, že tato rovnice v každém případě řešení má, že toto řešení je jediné (rozmyslete si proč) a že jej v principu umíme nalézt. Označme si toto jediné řešení naší rovnice $\alpha_0$.

Zopakujme nyní ještě jednou, co jsme zatím zjistili. Silové působení mezi oběma náboji neprobíhá tak, jako by oba náboje odděloval úhel $\pi$, ale jako by jejich vzájemná úhlová vzdálenost byla pouze $\pi - 2\alpha_0$.

Nyní je konečně na čase říci si, jak probíhá „zpracovávání“ signálů, které si mezi sebou náboje posílají. Podívejme se tedy do knihy Feynmanovy přednášky z fyziky[2], kde se objevuje vzorec

$$\boldsymbol{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}_{r'}}{\mathrm{d}t^2}\right].$$

Tento vzorec říká, že když se náboj prostřednictvím signálu dozví, že na místě popsaném polohovým vektorem $\boldsymbol{r}'$ (s počátkem pevně fixovaným v místě, kde se nachází náboj přijímající signál) a odpovídajícím jednotkovým vektorem $\boldsymbol{e}_{r'}$ se nachází náboj velikosti $q$, má se chovat stejně, jako by byl v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ dané uvedeným vzorcem. Čárky se v uvedeném vzorci vyskytují proto, abychom měli na paměti, že máme dosazovat pozici zdrojového náboje v okamžiku vyslání signálu, nikoli jeho příjmu.

Zde je možno upozornit na jednu „mouchu“ modelu, který jsme uvedli v prvních odstavcích. Aby byl náš model konzistentní s teorií relativity, potřebovali bychom, aby polohový vektor, kterým se zabýváme, neměl pevný počátek, ale aby se jednalo o vektor vzájemné polohy obou nábojů, a aby tak silové působení nebylo závislé na volbě inerciální soustavy. V praxi se tento problém překlene tím, že si vzájemné působení většinou představujeme pomocí vektorových polí, s vektorem intenzity jako funkcí polohy v prostoru. Tento model je nicméně na první seznámení s předmětem možná až příliš složitý, proto jsme užili sice ne zcela správného, ale názornějšího modelu.

Abychom mohli užít uvedeného vztahu, je třeba zjistit, jak se s časem mění vektor polohy zdrojového náboje vůči místu přijmutí signálu (vůči bodu B′). Užijeme proto oblíbenou fyzikální fintu: necháme čas, aby se posunul o malou hodnotu $\mathrm{d}t$, a budeme sledovat, jak se celá situace změní. Během této krátké doby se úhlová vzdálenost zdrojového náboje a bodu B′ změní z hodnoty $\pi - 2\alpha$ na hodnotu $\pi - 2\alpha + \omega\,\mathrm{d}t$. Tím se rovnoramenný trojúhelník osa otáčení–zdrojový náboj–bod B′ trochu zploští a úhel při jeho základně se zmenší o polovinu

[2]) Feynman, Leighton, Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky I.* Fragment, 2000, str. 372.

toho, o co se zvětší vrcholový úhel,

$$\mathrm{d}\alpha = -\frac{\omega\,\mathrm{d}t}{2}\,,$$

což je zároveň úhel, o který se pootočí jednotkový vektor $\boldsymbol{e}_{r'}$ okolo bodu $\mathsf{B}'$. Je užitečné si povšimnout, že velikost této změny není závislá na čase, což lze interpretovat tak, že se vektor $\boldsymbol{e}_{r'}$ otáčí kolem bodu $\mathsf{B}'$ rovnoměrnou úhlovou rychlostí $\omega/2$. Jak známo, vektory rychlosti a zrychlení takového pohybu jsou

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{r'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{2}\,\boldsymbol{f}_{r'}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}_{r'}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\omega^2}{4}\,\boldsymbol{e}_{r'}\,.$$

Zde jsme označili $\boldsymbol{f}_{r'}$ jednotkový vektor kolmý k $\boldsymbol{e}_{r'}$ (vektor $\boldsymbol{e}_{r'}$ otočený o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček).

S pootočením vektoru $\boldsymbol{r}'$ souvisí i změna jeho velikosti

$$r' = 2R\cos\alpha$$

o hodnotu (opět užijeme rozvoj do Taylorova polynomu, tentokrát stačí do prvního řádu)

$$\mathrm{d}r' = -2R\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \omega R\sin\alpha\,\mathrm{d}t\,.$$

Pro zpřehlednění zápisu si dopředu vypočtěme veličinu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{e}_{r'}\cdot\frac{1}{r'^2}\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{r'}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{r'^2} + \boldsymbol{e}_{r'}\cdot\left(-\frac{2}{r'^3}\,\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\right) =$$
$$= \frac{\boldsymbol{f}_{r'}\omega R\cos\alpha_0 - 2\boldsymbol{e}_{r'}R\omega\sin\alpha_0}{(2R\cos\alpha_0)^3} = \frac{\omega}{8R^2\cos^3\alpha_0}\left(\boldsymbol{f}_{r'}\cos\alpha_0 - 2\boldsymbol{e}_{r'}\sin\alpha_0\right)\,.$$

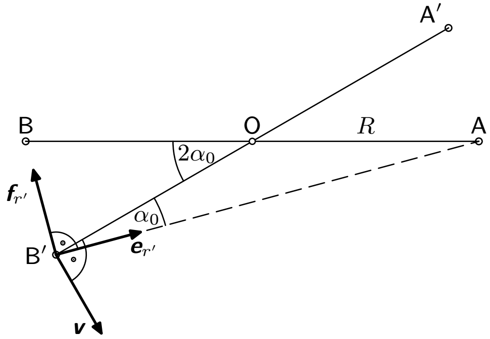
Nyní již stačí dosadit získané hodnoty do uvedeného vzorce a dostáváme velikost elektrické intenzity v bodě $\mathsf{B}'$ jako

$$\boldsymbol{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{(2R\cos\alpha_0)^2} + \frac{2R\cos\alpha_0}{c}\cdot\frac{\omega}{8R^2\cos^3\alpha_0}\left(\boldsymbol{f}_{r'}\cos\alpha_0 - 2\boldsymbol{e}_{r'}\sin\alpha_0\right) - \frac{\omega^2}{4c^2}\,\boldsymbol{e}_{r'}\right]\,.$$

Elektrická síla působící na každý náboj je potom z Lorentzova vztahu rovna

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{e}_{r'}\left(\frac{1}{4R^2\cos^2\alpha_0} - \frac{\omega\sin\alpha_0}{2Rc\cos^2\alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2}\right) + \boldsymbol{f}_{r'}\left(\frac{\omega}{4Rc\cos\alpha_0}\right)\right]\,.$$

Abychom mohli vypočítat výkon, se kterým koná tato síla práci, potřebujeme určit úhel, který svírají vektory síly a rychlosti. Vektor rychlosti každého náboje je tečný ke kružnici, po které náboje obíhají, celá situace tedy vypadá stejně jako na obrázku 2. Z něho vidíme, že velikost úhlu mezi vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{e}_{r'}$ je rovna $\pi/2-\alpha_0$ a úhel mezi vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{f}_{r'}$ je roven $\pi-\alpha_0$.




Obr. 2. Vzájemné postavení vektorů

Výkon, kterým konají práci elektrické síly působící na každý náboj, je potom dán skalárním součinem

$$P_1 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{-q^2 \omega R}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \sin\alpha_0 \left( \frac{1}{4R^2\cos^2\alpha_0} - \frac{\omega \sin\alpha_0}{2Rc\cos^2\alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2} \right) - \cos\alpha_0 \left( \frac{\omega}{4Rc\cos\alpha_0} \right) \right] .$$

To však ještě není všechno. Výkon, vypočtený z uvedeného vzorce je kladný. Protože máme zanedbat tření a magnetická síla práci nekoná (je kolmá k pohybu), tedy pokud by vše bylo tak, jak jsme to doposud uvažovali, energie soustavy by se sama od sebe zvyšovala, náboje by se navzájem urychlovaly a měli bychom co do činění s perpetuem mobile! Tento rozpor se dá naštěstí poměrně lehce vyřešit.

Zatím jsme totiž neuvažovali energii, kterou s sebou nese elektromagnetické pole. Hustota energie skryté v elektrickém poli je úměrná druhé mocnině velikosti vektoru elektrické intenzity a rovna $\varrho = \varepsilon_0 E^2/2$. Pokud sem dosadíme za vektor elektrické intenzity výše odvozený vztah a vypočteme výkon, s jakým každý náboj vyzařuje do prostoru, dostaneme pro nerelativistické rychlosti nábojů vztah

$$P_2 = \frac{q^2 \omega^4 R^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} .$$

Případné zájemce o odvození tohoto vztahu odkážeme na již citované Feynmanovy přednášky z fyziky, neboť se jedná o poněkud delší výpočet. Je důležité, že se tímto způsobem vyzáří více energie, než kolik získají náboje vzájemnou interakcí, ve výsledku tedy vyšetřovaná soustava jako celek energii ztrácí a k žádnému rozporu zde nedochází.

Uvedené dva způsoby jsou jedinými cestami, kterými naše soustava může získávat nebo ztrácet energii. Celkový výkon, který soustava spotřebovává a který jí musíme dodávat, abychom ji udrželi v rovnoměrné rotaci, je tedy součtem obou výkonů přes oba náboje

$$P_{\mathrm{total}} = 2(P_2 - P_1) ,$$

kde velikosti jednotlivých výkonů jsou uvedeny výše. Upozorňujeme ještě jednou, že odvozené řešení je platné pouze pro nerelativistické rychlosti nábojů.

Uveďme nyní ve stručnosti, jak bychom příklad řešili v případě, že bychom se zajímali o malé rychlosti obou nábojů. Pro malé hodnoty argumentu $x$ získáme Taylorovým rozvojem

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} , \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} ,$$

$$(1-x)^a \approx 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 .$$

Důležité je, že pokud místo daných funkcí použijeme uvedené polynomy, dopustíme se chyby, která je řádově rovna první zanedbané mocnině $\omega$, čili pro malá $\omega$ se užitím přibližných vzorců dopustíme pouze malé chyby.

Nyní můžeme s těmito přibližnými vztahy vyřešit (alespoň přibližně pro malé rychlosti) tu ošklivou rovnici pro $\alpha_0$, se kterou jsme neuměli hnout,

$$\alpha_0 = \frac{\omega R}{c} \cos \alpha_0 \,.$$

Předpokládejme, že můžeme řešení naší rovnice vyjádřit ve tvaru

$$\alpha_0 = A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 ,$$

a podívejme se, zdali nám tento předpoklad přinese nějaký užitek. Rozvoj jsme dělali do třetího řádu, protože se v dalších úpravách dostaneme na úroveň mocniny vyzařovacího členu. Dosaďme

$$A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 =$$
$$= \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega R}{2c}\left(A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3\right)^2 +$$
$$+ \frac{\omega R}{24c}\left(A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3\right)^4 .$$

Aby byla námi navržená hodnota skutečně řešením, musí se na obou dvou stranách rovnice rovnat koeficienty u nejnižších mocnin. Srovnáním koeficinetů u těchto mocnin $\omega$ (nejprve u nulté, pak u první až u třetí) dostáváme pro hodnoty koeficientů postupně

$$A = 0 \,, \quad B = 1 \,, \quad C = 0 \,, \quad D = -\tfrac{1}{2} \,.$$

Řešení rovnice je tedy přibližně

$$\alpha_0 \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{1}{2}\frac{\omega^3 R^3}{c^3} \,.$$

Doufám, že vás již tato krátká ukázka přesvědčila o tom, že výše uvedené přibližné vzorce jsou velice užitečné a že díky nim dokážeme zjednodušit mnohé ošklivé vztahy. Pokud jste tyto přibližné vzorce ještě nikdy neviděli, tak vám vřele doporučujeme, abyste si je dobře zapamatovali, jelikož vám mnohdy pomohou a jistě se s nimi ještě setkáte.

Nyní počítejme všechny členy, které nás zajímají (vzhledem k dalšímu postupu musíme každý člen určit do řádu $\omega^3$, abychom se dostali na úroveň vyzařovacího členu):

$$\sin \alpha_0 \approx \alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6} \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 ,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_0} = \left(1 - \sin^2 \alpha_0\right)^{-1} \approx 1 + \sin^2 \alpha_0 \approx 1 + \alpha_0^2 \approx 1 + \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 ,$$

$$\frac{\sin \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} = \sin \alpha_0 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \approx \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6}\right) \cdot (1 + \alpha_0^2) \approx \frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 ,$$

$$\frac{1}{\cos \alpha_0} = \left(1 - \sin^2 \alpha_0\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\sin^2 \alpha_0}{2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 .$$

Tyto výrazy můžeme dosadit do odvozeného vztahu pro výkon $P_1$ a dostaneme

$$P_1 \approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^3\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{1}{4R^2}\cdot\left(1+\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2\right) - \frac{\omega}{2Rc}\cdot\left(\frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^3\right) - \frac{\omega^2}{4c^2}\right] - \left(\frac{\omega}{4Rc}\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^3\right)\left[\frac{1}{4R^2} - \frac{\omega^2}{2c^2}\right] - \left(\frac{\omega}{4Rc}\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2\omega^3 R}{3c^3}\right) \approx \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\omega^4 R^2}{c^3}\,.$$

Tento výsledek nás dostal do pěkných potíží! Říká nám totiž, že energie, kterou náboje získají vzájemnou interakcí je s přesností do řádu $\omega^4$ stejně velká, jako energie, kterou náboje vyzáří. Tyto dva příspěvky se vzájemně vyruší, takže celkový výkon, který musíme nábojům dodávat, je úměrný nejméně páté mocnině úhlové rychlosti otáčení. Což je jistě zajímavý výsledek sám o sobě, nicméně pokud bychom chtěli i konstantu úměrnosti, museli bychom právě uvedený postup opakovat s tím, že bychom museli všechny členy určovat s přesností do páté mocniny $\omega$. Jak jistě tušíte, výpočet je to poměrně zdlouhavý a ani na něj zde nemáme místo. Proto zde uvedeme pouze výsledek, ke kterému mohou zájemci dojít zcela analogickým postupem, jaký jsme zde právě uvedli. Výkon spotřebovaný jedním nábojem v důsledku vzájemné interakce je potom přibližně

$$P_1 = \frac{28}{60}\cdot\frac{\omega^6 R^4}{\pi\varepsilon_0 c^5}\,.$$

Tím jsme se však dostali do jiného problému. Tak malé odchylky již na úrovni relativistických korekcí vztahu pro vyzařovaný výkon. Provedeme-li totiž výpočet výkonu vyzářeného zrychlující částicí relativisticky, dostaneme se ke vztahu

$$P_2 = \frac{q^2\omega^4 R^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3} \approx \frac{q^2\omega^4 R^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right),$$

platnému snad již obecně. Zájemci jej naleznou třeba v knize D. J. Griffitha: *Introduction to Electrodynamics*.

Sečtením dvou posledních vztahů potom dostáváme pro výkon nutný k udržení rovnoměrné rotace soustavy výraz

$$P_{\mathrm{total}} = \frac{29}{15}\cdot\frac{\omega^6 R^4}{\pi\varepsilon_0 c^5}\,.$$

Závěrem bychom chtěli vyzdvihnout *Dalimila Mazáče*, který měl jako jediný skoro správné řešení a zaslouží si za to prémii.

***Pavel Motloch***
`pavel@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.