21. ročník, úloha II . 3 ... *víno teče proudem* *(4 body; průměr 2,08; řešilo 38 studentů)*

Vinaři a řidiči kamionu dobře znají šikovné přelévání kapalin z těžkých nádob. Vinař Ignác chce stočit víno z jednoho demižonu do druhého. Nejprve položí prázdný demižon na zem a plný do výšky Δ. Potom demižony propojí hadičkou a trochu z ní zespodu potáhne. Víno začne samovolně proudit do spodního demižonu. Za jak dlouho bude všechno víno stočeno? Předpokládejte, že demižony jsou stejné válce poloměru R a výšky H.

Vymyslel vinař Jano Lalinský.

Předvedeme řešení úlohy s použitím integrálního počtu, ale i bez něj. Přidržíme se značení ze zadání. Navíc plošný průřez demižonu neboli plochu podstavy označme S_{D}, plošný průřez hadičky S_{H}. Aktuální výšku hladiny ve spodním demižonu nazvěme x; výška hladiny oproti dnu ve vrchním demižonu pak je $H - x$.

Na počátku přepouštění umístíme spodní konec hadičky co nejníže až na dno spodního demižonu a dále budeme tento konec držet ponořený pod úrovní hladiny. Každodenní zkušenost se stáčením vína nám říká, že rychlost přečerpávání by měla záviset na okamžitém rozdílu výšky hladin v demižonech, který je dán $h = \Delta + H - 2x$. Zároveň pokud budou oba konce hadičky ponořené, nebude záviset na tom, zda jsou u dna nebo těsně u hladiny. Tyto postřehy však vyplynou z Bernoulliho rovnice, kterou použijeme k popisu problému. Bernoulliho rovnice v podstatě popisuje proudění tekutiny v trubici, která mění svůj průřez a výšku nad zemí, a svým způsobem vyjadřuje zákon zachování energie pro kapalinu v tomto systému. I naše sudy spolu s hadičkou tvoří takovou trubici která mění svůj průřez a výšku nad zemí. Rovnice v uvedeném tvaru platí za předpokladu, že proudění je ustálené, laminární a kapalina není viskózní, tedy energie se neztrácí třením. Blíže se o těchto předpokladech zmíníme na závěr. Podle Bernoulliho rovnice pro libovolná dvě místa v trubici platí

$$\tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 + p_2\,, \tag{1}$$

kde ϱ je hustota kapaliny. Po řadě v, h, p jsou rychlost kapaliny, výška nad zemí a tlak v příslušném místě trubice. Nás nyní zajímá rychlost průtoku vína hadičkou. Předpokládejme na chvíli, že ústí hadičky ve spodním sudu je těsně u dna. Za první místo si zvolíme bod přesně na hladině vrchního sudu a druhé místo bude bod v hadičce těsně před ústím ve spodním sudu, tedy ve výšce nula. Víno se nestlačuje a objem proteklý hadičkou je tedy zřejmě stejný jako objem vyteklý ze sudu, z čehož plyne $S_{\mathrm{D}} v_1 = S_{\mathrm{H}} v_2$ a pro přehlednost

$$v_1 = k v_2\,, \qquad k = \frac{S_{\mathrm{H}}}{S_{\mathrm{D}}}\,. \tag{2}$$

Dosazením do (1) získáme

$$\tfrac{1}{2}\varrho (k v_2)^2 + \varrho g(\Delta + H - x) + p_{\mathrm{a}} = \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_{\mathrm{a}} + \varrho g x\,, \tag{3}$$

kde p_{a} je atmosférický tlak, který je však nad hladinou obou sudů v podstatě stejný, a odečte se tedy. Můžeme si zde povšimnout, že rovnost vyjde na chlup stejná, ať už jsou konce hadičky u dna či těsně u hladiny, a nesejde na tom, jak je vysoko nejvyšší bod hadičky. Rovnost podělíme hustotou ϱ a vyjádříme rychlost vína v hadičce jako

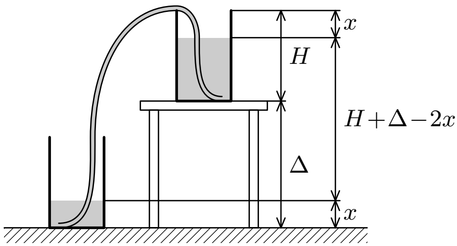
$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)}{1 - k^2}} \tag{4}$$

a rychlost v_1, jakou se posouvá hladina v demižonu, je

$$v_1 = \dot{x} = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}} . \tag{5}$$

Zápis $\dot{x}$ znamená derivaci x podle času. Pokud máme velký demižon a tenkou hadičku, je faktor k velmi blízký nule a výraz $1 - k^2$ velmi blízký jedničce a (4) potom přechází ve známý vztah pro výtokovou rychlost uváděný ve tvaru $v = \sqrt{2gh}$. Tomu se samozřejmě nedivíme, protože při umístění spodního konce hadičky do vzduchu těsně nad hladinu můžeme hovořit o volném vytékání kapaliny otvorem, který je v hloubce $h = \Delta + H - 2x$ pod hladinou ve vrchním demižonu. Všimněme si však jedné zrady. Pokud bude $S_\mathrm{H}/S_\mathrm{D} = k = 1$, pak podle (4) vyjde rychlost v_2 nekonečná! To ale není možné, protože rychlost padajícího sloupce kapaliny bude odpovídat rychlosti při volném pádu. Problém je v tom, že Bernoulliho rovnice v jednoduchém použitém tvaru platí pouze pro ustálené proudění, tedy takové, že se rychlost v čase nemění. Jak se hladiny přibližují, bude se rychlost proudění měnit každopádně, avšak pokud je S_D výrazně větší než S_H, rychlost se v čase mění jen velmi pomalu a Bernoulliho rovnici lze použít.

Víme tedy, jak závisí rychlost vína v hadičce na výšce hladiny x ve spodním demižonu, a vidíme, že skutečně závisí na rozdílu výšky hladin mezi demižony. Ještě zdůrazněme, že v rovnici (4) se v_2 a x v čase mění! Obecně tedy není možné vypočítat čas stočení tak, že objem vína vydělíme objemovým průtokem.



Obr. 1. Schéma pokusu

Uvedeme si hned dva způsoby, jak ze znalosti vztahu (4) vypočítat celkovou dobu T, za kterou všechno víno přeteče z vrchního sudu do spodního. První způsob nevyžaduje integrování.

Podívejme se pozorněji na vztah (5). Vidíme, že rychlost snižování hladiny je hrubě řečeno úměrná odmocnině výšky hladiny. Pro obyčejný rovnoměrně zrychlený pohyb platí, že rychlost roste hrubě řečeno s první mocninou času a dráha roste s druhou mocninou času a rychlost je tedy také svým způsobem úměrná odmocnině uražené dráhy. Uvažujme nyní obecný rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb se zrychlením a. Potom platí

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 ,$$

což je kvadratická rovnice pro čas t, který vyjádříme pomocí známého vzorečku

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}{a} .$$

Dosazením za t do vztahu $v = v_0 + at$ a položením $x_0 = 0$ dostáváme

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} . \tag{6}$$

To je ale velmi podobné vztahu (5). Porovnáním (5) a (6) jistě najdeme takové hodnoty v_0 a a, že dosáhneme rovnosti mezi (5) a (6) a nějaký rovnoměrně zrychlený vývoj výšky x tedy vyhovuje rovnici (5). Konkrétně

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H)k^2}{1 - k^2}}, \qquad a = -2g \, \frac{k^2}{1 - k^2} .$$

Jediné, co víme o vývoji hladiny v sudu je právě vztah (5) a fakt, že $x(t=0)=0$. Našli jsme tudíž takový časový vývoj hladiny, že jsou splněny právě tyto dvě podmínky, a proto je tento časový vývoj ten skutečně realizovaný.

Výška hladiny se mění rovnoměrně zpomaleně a dobu přetečení T určíme snadno. Automobil jedoucí rovnoměrně zrychleně ujede určitou dráhu za stejnou dobu jako automobil jedoucí celou dobu rychlostí rovnou průměrné rychlosti prvního auta[1]. To snadno ověříme třeba tak, že si nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase a uvědomíme si, že uražená dráha je rovna obsahu plochy v grafu pod touto závislostí. Co platí pro auto, platí i pro přelévání vína. Na počátku $x=0$, na konci, když je sud plný, $x=H$. Ze vztahu (5) snadno určíme počáteční a koncovou rychlost, průměrná rychlost je pak jejich aritmetický průměr a pro dobu T tudíž platí

$$T=\frac{2H}{\sqrt{\frac{2g(\Delta+H)k^2}{1-k^2}}-\sqrt{\frac{2g(\Delta-H)k^2}{1-k^2}}}=\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}}\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Delta+H}-\sqrt{\Delta-H}\right).$$

Jak jsme řekli, použitý postup řešení je korektní pouze pro $k\ll 1$ a bez strachu z velké nepřesnosti můžeme psát

$$T=\frac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{H}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Delta+H}-\sqrt{\Delta-H}\right).$$

Druhý způsob. Je třeba se vypořádat s tím, že jak se hladiny přibližují, přetečení určitého objemu vody trvá postupně déle a déle. Čas T lze dostat tak, že vždy vezmeme malý kousek objemu $\mathrm{d}V$ a spočteme dobu $\mathrm{d}T$, za kterou tento malý kousek přeteče z jednoho sudu do druhého. Přetečením objemu $\mathrm{d}V$ se výška hladiny změní o malý kousek $\mathrm{d}x$. Příští kousek objemu $\mathrm{d}V$ už bude tedy vytékat trošičku pomaleji než předchozí. Celkový čas T pak dostaneme součtem jednotlivých $\mathrm{d}T$. Protože jsme dílčí objemy $\mathrm{d}V$ volili libovolně malé, suma přechází v integrál ($\mathrm{d}V$ je tak malý, abychom mohli předpokládat, že během jeho protékání se rychlost průtoku vlastně nemění). Zároveň patrně $\mathrm{d}V=S_\mathrm{D}\,\mathrm{d}x$, na počátku je $x=0$, na konci $x=H$ a objemový průtok hadičkou $Q=S_\mathrm{H}v_2$. Konečně tedy můžeme psát integrál a aplikovat na něj klasickou matematickou mašinerii

$$T=\int_0^T\mathrm{d}t=\int_0^V\frac{\mathrm{d}V}{Q}=\int_0^H\frac{S_\mathrm{D}dx}{S_\mathrm{H}\sqrt{2g(\Delta+H-2x)/(1-k^2)}}=$$
$$=\frac{S_\mathrm{D}}{S_H}\sqrt{\frac{1-k^2}{2g}}\int_0^H\frac{dx}{\sqrt{\Delta+H-2x}}.$$

Integrál vypočteme užitím lineární substituce $z=\Delta+H-2x$. Nové meze integrálu dostaneme dosazením původních mezí do vztahu pro z, tedy

$$\int_0^H\frac{dx}{\sqrt{\Delta+H-2x}}=\int_{\Delta+H}^{\Delta-H}\frac{dz}{2\sqrt{z}}=\left[\sqrt{z}\right]_{\Delta-H}^{\Delta+H}=\sqrt{\Delta+H}-\sqrt{\Delta-H}$$

a celkový čas vychází

$$T=\frac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{H}}\sqrt{\frac{1-k^2}{2g}}\left(\sqrt{\Delta+H}-\sqrt{\Delta-H}\right).$$

[1]) Varování: uvedené platí skutečně jen pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Pokud $\Delta < H$, víno nepřeteče všechno a spodní sud se naplní jen do výšky $x = (\Delta + H)/2$. Dobu přetékání pak dostaneme jednoduše záměnou horní meze integrálu za $x = (\Delta + H)/2$.

Nakonec ještě sestavme diferenciální rovnici popisující časový vývoj výšky hladiny x. Umocněním (5) máme

$$\dot{x}^2 = \frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}\,.$$

Teď obě strany rovnice zderivujeme podle času. Je třeba si uvědomit, že $\dot{x}^2$ je složená funkce, jejíž časová derivace je $2\dot{x}\ddot{x}$. Máme proto

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{4g\dot{x}k^2}{1 - k^2}\,,$$

což podělíme $\dot{x}$, lehce upravíme a dostáváme výraz pro zrychlení výšky hladiny x v sudu

$$\ddot{x} = -2g\,\frac{k^2}{1 - k^2}\,.$$

To je ale evidentně konstanta, čímž jsme potvrdili úvahu provedenou během prvního způsobu řešení. Dobu přečerpání T lze tedy určit již uvedeným způsobem. Mohla by nás třeba ještě zajímat přímo závislost x na čase. Jediná funkce, jejíž druhá derivace je konstantní, je obecná kvadratická funkce $x(t) = At^2 + Bt + C$. Je třeba jen dopočítat koeficienty A, B, C. Avšak jistě platí $\ddot{x} = 2A$, $\dot{x}(t = 0) = B$, $x(t = 0) = C = 0$.

Vraťme se k předpokladům Bernoulliho rovnice. Otázku ustáleného proudění jsme již probrali. Velice silným předpokladem je nulová viskozita vína. Viskozita hrubě řečeno vyjadřuje, jak velké je tření mezi dvěma různě rychlými vrstvami tekutiny. Při průtoku vína hadičkou se víno tře o stěny hadičky a navíc proudění je při stěně hadičky pomalejší než uprostřed a pomyslné vrstvy kapaliny se třou i mezi sebou. Třením vzniká teplo, a proto v hadičce dochází ke ztrátě energie a Bernoulliova rovnice přestává platit. Čím je proudění rychlejší, tím jsou tření a ztráty energie větší.

Kupříkladu když jsme zkoušeli přelévat vodu z výšky půl metru tenkou hadičkou průměru půl centimetru, pak doba přelévání byla pro hadičku dlouhou jeden metr o polovinu delší než pro půlmetrovou hadičku. Rozdíl je tedy velice výrazný, a vypočtený čas T je proto jakýmsi nedosažitelným minimem. Mým osobním názorem je, že by možná šla provést korekce ve vztahu (3) přidáním na pravou stranu členu $\alpha l v_2/r$, který vyjadřuje ztrátu energie v hadičce délky l a poloměru r, přičemž α je nějaká konstanta odpovídající konkrétní kapalině. Uvědomme si také, že i při vstupu kapaliny do spodního demižonu v důsledku tření dojde k jejímu zbrzdění na rychlost v_1 a mechanická energie se nevyhnutelně ztrácí.

Zkusme si také rozmyslet, kdy je proudění v hadičce nevířivé. Při popisu proudění se zavádí takzvané *Reynoldsovo číslo*, definované

$$\mathcal{R}e = \frac{vr\varrho}{\eta}\,,$$

kde v je střední rychlost proudění, r poloměr trubice a η dynamická viskozita. Ze zkušenosti víme, že pokud rychlost vody v trubici vzroste natolik, že $\mathcal{R}e$ je přibližně větší než 1000, proudění přejde v turbulentní. Dosazením konkrétních hodnot zjistíme, že se to při přelévání vína klidně může stát. Uvědomme si, že při přelévání demižonů je rychlost v trubičce v ideálním případě nezávislá na poloměru a k vířivému proudění dojde spíše při použití širší hadičky.

Závěrem bych pro vás měl jeden námět k přemýšlení. Uvádí se, že kapalina se při vstupu do širší části trubice zbrzdí v důsledku většího tlaku v této širší části. Je tedy správné uvažovat tlak na konci trubičky ve spodním demižonu $p_2 = \varrho g x$?

Marek Scholz
`mara@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.