21. ročník, úloha II . 1 ... flusanec *(4 body; průměr 2,33; řešilo 39 studentů)*

Představte si, že jedete rychlíkem. Díváte se ven z otevřeného okna a sledujete okolní krajinu. O tři okna dál po směru jízdy nějaký zákeřný lump vyplivne žvýkačku. Kolik času máte, abyste stihli uhnout? Samozřejmě předpokládáme, že žvýkačka je dokonalá koule a z okna nebyla vyhozena, nýbrž vlastně položena do proudu vzduchu. *Zažil Roman Fiala.*

Zadání této úlohy se sice jeví poměrně jednoduché, ale k úplnému řešení vede poměrně dlouhá cesta plná odhadů a zanedbání.

První problém je proudění okolo vagónu. Vzhledem k tomu, že vlak s sebou strhává okolní vzduch, nebude rychlost vzduchu vůči lidem ve vagóně přesně rovna rychlosti vlaku, ale bude menší. Nicméně tento i další jevy při řešení zanedbáme a při řešení se omezíme na popis pohybu malé kuličky v proudu plynu známých parametrů. Budeme uvažovat turbulentní proudění a tudíž i Newtonův vzorec pro výpočet velikosti odporové síly

$$F_\mathrm{o} = \tfrac{1}{2}CS\varrho v^2 = \tfrac{1}{2}CS\varrho\dot{x}^2\,,$$

kde C je součinitel odporu a S průřez kolmý k rychlosti v ($\dot{x}$, tečka představuje první derivaci podle času).

Pro jednodušší popis budeme uvažovat vztažnou soustavu spojenou s jedoucím vagónem. Označíme-li v_0 rychlost vlaku, pak Newtonovy pohybové rovnice mají tvar

$$m\ddot{x} = \tfrac{1}{2}CS\varrho(v_0 - \dot{x})\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}\,,$$
$$m\ddot{y} = -g - \tfrac{1}{2}CS\varrho|\dot{y}|\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}\,.$$

To jsou sice pěkné rovnice, ale s jejich řešením už je to těžší. Uvážíme-li, že oproti velkým rychlostem ve vodorovném směru se svislá rychlost mění jen minimálně (doba letu bude určitě v řádech sekund, spíš desetin sekundy) a navíc bude tak malá, že se odporová síla téměř neprojeví, můžeme soustavu rovnic přepsat do podoby

$$m\ddot{x} = \tfrac{1}{2}CS\varrho(v_0 - \dot{x})^2\,,$$
$$m\ddot{y} = -g\,,$$

která je již snazší pro řešení. Začneme první rovnicí, druhou si ponecháme jenom jako kontrolu provedených aproximací až na konec.

Nejdřív se substitucí zbavíme druhé derivace na levé straně a vyšetříme časový průběh rychlosti (konstantu $CS\varrho/2m$ označíme jako K) a rovnici

$$\dot{v} = K(v_0 - v)^2$$

řešíme metodou separace proměnných. Tedy musíme vypočítat integrály

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{(v_0 - v)^2} = \int K\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\frac{-1}{v - v_0} = C + Kt\,.$$

Konstantu C určíme z počátečních podmínek ($t = 0$, $v = 0$). Výsledek

$$v = \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t}$$

je kupodivu další diferenciální rovnice, kterou je třeba vyřešit, protože v je jen derivace polohy podle času ($\dot{x}$). Postup je jasný – opět separace proměnných, tj.

$$\int x \,\mathrm{d}x = \int \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t} \,\mathrm{d}t \,.$$

Výsledek už je potom hledaná závislost polohy žvýkačky na čase (integrační konstanta z předchozího vztahu vyjde nulová, neboť z počáteční podmínky $t = 0$ opět dostáváme $x = 0$)

$$x = v_0 t - \frac{1}{K} \ln(1 + Kv_0 t) \,.$$

Protože počítáme v soustavě spojené s vlakem, stačí dosadit za x vzdálenost tří oken d a dořešit rovnici vůči t. Ale to bohužel analyticky nejde, a tak se musíme uchýlit k nějakému úhybnému manévru. Vzhledem k tomu, že letošní seriál se zabývá počítačovou fyzikou, není pro nás problém použít k dořešení poslední rovnice aspoň tabulkového procesoru. Budeme-li uvažovat parametry $C = 0{,}5$, $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$, $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $m = 1{,}4\,\mathrm{g}$, $v_0 = 140\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a $d = 6\,\mathrm{m}$, vyjde $t = 0{,}79\,\mathrm{s}$.

Nyní je na čase se pozastavit nad druhou rovnicí – volným pádem žvýkačky. Dosadíme-li výsledný čas t do známého vztahu pro dráhu uraženou padajícím tělesem, $s = gt^2/2$, dospějeme k závěru, že žvýkačka za tuto dobu urazí asi 3 metry svisle dolů, tudíž nás vůbec nezasáhne.

Přesnější výsledek bychom dostali, kdybychom vyšli hned z první soustavy diferenciálních rovnic a simulovali rovnou ji; uvažují totiž odporovou sílu tak, jak ve skutečnosti působí – proti směru pohybu žvýkačky. Při použití stejných parametrů jako v předchozím výpočtu pak obdržíme čas t lišící se pouze o desetiny procent. Přesná hodnota poklesu však pro nás není tolik zajímavá, neboť by žvýkačka stále klesala tak rychle, že zásah by byl vyloučen.

Další možná aproximace spočívá v zanedbání změny horizontální rychlosti žvýkačky, tzn. flusanec se bude pohybovat rovnoměrně zrychleně (vůči vlaku). Výhodou je, že lze výsledek vypočítat přesně, ale bude mírně nadsazený, nicméně pokud se bude od skutečného lišit maximálně o polovinu reakční doby člověka, lze jej prohlásit za použitelný. Platí vztah

$$t = \sqrt{\frac{2d}{Kv^2}} \,.$$

Dosadíme-li opět stejné hodnoty, nám $t = 0{,}69\,\mathrm{s}$, což vyhovuje výše uvedeným podmínkám, ale stejně jako v předchozích případech žvýkačka dřív spadne na zem.

Posílali jste i řešení, kde jste místo Newtonova vzorce použili Stokesův pro laminární proudění; toto řešení je sice přesnější než naposledy zmíněné, ale jak správně ukzala *Tereza Steinhartová*, jde opravdu o proudění turbulentní.

Vaše řešení byla většinou shodná s prvním nebo třetím způsobem výpočtu (ale někteří nenapsali, proč si mohou dovolit počítat pouze s rovnoměrně zrychleným pohybem). Nejčastější chybou bylo úplné opomenutí volného pádu. Bohužel se našli i tací, kteří tvrdili, že po vyplivnutí z vlaku se žvýkačka okamžitě vůči zemi zastaví. Nakonec pár z vás (jako třeba *Tereza Jeřábková*) zkoušelo úlohu řešit experimentálně a tím, že jim žvýkačka spadla, potvrdili teoretický výsledek.

Aleš Podolník
`ales@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.