21. ročník, úloha I . 2 ... *zachraňte bublinu* *(5 bodů; průměr 2,08; řešilo 38 studentů)*

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina?

Z hloubi duše vybublalo Janovi Lalinskému.

Vypuštěnou bublinu o objemu V žene nahoru vztlaková síla $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho_{\mathrm{k}}g$ a proti ní působí odpor prostředí spolu s tíhou F_G. Pro odporovou sílu použijeme Newtonův vztah

$$F_{\mathrm{odp}} = \tfrac{1}{2}CS\varrho_{\mathrm{k}}v^2 \,.$$

Bublinka brzděná touto silou dosáhne velice brzy ustálené rychlosti dané (pro její okamžité rozměry) rovnováhou

$$F_{\mathrm{odp}} + F_G = F_{\mathrm{vz}} \,,$$
$$\tfrac{1}{2}CS\varrho_{\mathrm{k}}v^2 + nM_{\mathrm{m}}g = V\varrho_{\mathrm{k}}g \,,$$

kde n značíme látkové množství a M_{m} molární hmotnost vzduchu ($\doteq 29\,\mathrm{g/mol}$).

Není žádným překvapením, že velikost bubliny se bude během stoupání měnit, protože se mění okolní tlak. Vztah mezi tlakem a hustotou (objemem) nějaké látky popisuje její stavová rovnice. V extrémních podmínkách Mariánského příkopu musíme použít van der Waalsovu rovnici, protože vzduch, byť daleko za kritickým bodem, tu ztrácí vlastnosti ideálního plynu. Platí

$$\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \,,$$

kde $a = 0{,}14\,\mathrm{J\cdot m^3\cdot mol^{-2}}$ a $b = 3{,}64\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}}$. Tlak p v hloubce h je $p(h) = h\varrho_{\mathrm{k}}g + p_{\mathrm{atm}}$, nicméně atmosférický tlak lze bez obav zanedbat (chyba tímto zanedbáním způsobená je v řádu desítek sekund).

Chtěli bychom nyní ze stavové rovnice vyjádřit V jako funkci hloubky h, což je dost obtížné, a hlavně výsledek by byl kvůli složitosti dále nepoužitelný. Neuděláme ovšem velkou chybu, když člen $a(n/V)^2$ prohlásíme za mnohem menší než p a z našich úvah ho vypustíme. Zároveň předpokládáme, že teplota bubliny T bude konstantní a rovna přibližně $4\,^\circ\mathrm{C}$, kterou očekáváme v takových hloubkách (je to teplota nejhustší vody). Pak

$$V = nb\left(1 + \frac{RT}{bh\varrho_{\mathrm{k}}g}\right) = nb\nu(h) \,,$$

kde jsme pro úsporu místa zavedli funkci hloubky $\nu(h)$.

Další problém je otázka tvaru bubliny. V literatuře[1] se lze dočíst[2], že malé bublinky zachovávají přibližně kulový tvar, zatímco větší bubliny se mohou různě protahovat či zplošťovat v závislosti na rychlosti obtékání. Také samotné stoupání se neděje po přímce, nýbrž po spirále. My tu uvažujeme kulovou bublinu stoupající přímo vzhůru. Pak je $C \doteq 0{,}48$ a příčný průřez bubliny je roven

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}\pi n^2 b^2 \nu^2(h)} \,.$$

[1] `http://www.mae.cornell.edu/mingming/RecentResearch/3Dtracking/PF02.pdf`

[2] Někteří to odpozorovali v bazénu jako *Zuzka Dočekalová*.

Ustálená rychlost stoupání tak (z výše uvedené rovnováhy sil) vychází

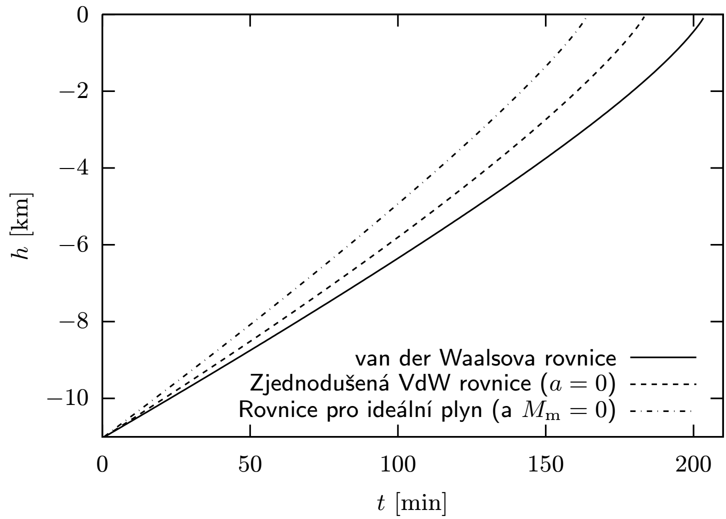
$$v = \sqrt{\frac{2g}{9\varrho_k C}} \sqrt[6]{\frac{n}{\pi}} \frac{\sqrt{b\nu(h)\varrho - M_\mathrm{m}}}{\sqrt[3]{b\nu(h)/4}} \,.$$

Protože se rychlost s hloubkou mění, čas nezískáme jinak než integrací časového elementu $\mathrm{d}t = \mathrm{d}h/v(h)$ přes všechny hloubky od $H = 11\,\mathrm{km}$ až k hladině. Tudíž

$$t = \int_0^H \frac{\mathrm{d}h}{v(h)} = \sqrt[6]{\frac{9}{128}\frac{\pi}{n}\frac{\varrho_\mathrm{k}^3 C^3 b^2}{g^3}} \cdot \int_0^H \frac{\sqrt[3]{\nu(h)}}{\sqrt{b\nu(h)\varrho_\mathrm{k} - M_\mathrm{m}}}\,\mathrm{d}h \,.$$

Tento integrál nám stačí vypočítat numericky, což zvládne i lepší kalkulačka, natožpak čtenář letošního seriálu, a vyčíslíme-li i ostatní konstanty (hustotu mořské vody bereme $\varrho_\mathrm{k} = 1\,050\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$), dostaneme

$$t \doteq \frac{1{,}1}{\sqrt[6]{n}} \cdot 10^4\,\mathrm{s{\cdot}mol^{1/6}} \,.$$



Obr. 1. Graf závislosti $h(t)$ pro jednomolovou bublinku

Jednomolová bublina (pokud se po cestě nerozpadne) vyplave asi za 3 hodiny. Větší bublina poplave rychleji, menší pomaleji. Na přiloženém grafu je vynesena závislosti okamžité hloubky bublinky na čase podle různých stupňů přiblížení při řešení této úlohy. Pokud bychom použili stavovou rovnici ideálního plynu a neuvažovali hmotnost vzduchu (proč?), dostali bychom asi 2,5 hodiny. Naopak pokud bychom postupovali podle nezjednodušené van der Waalsovy rovnice, čas výstupu bubliny by se oproti uvedenému výpočtu přibližně o půl hodiny protáhl. V každém případě jsme získali jen dolní odhad času; netušíme, po jaké trajektorii bublinka ve skutečnosti poplave.

Jedna poznámka na závěr. Mnoho z vás použilo Stokesův viskózní odpor, tj. $F_\mathrm{odp} = 6\pi\eta r v$, pak by ovšem ustálená rychlost bubliny byla příliš velká na zachování laminárního obtékání.

Takový pohyb musí vyvolat turbulence, které bere v úvahu právě Newtonův vztah pro turbulentní odpor.

Jakub Benda
jakub@fykos.mff.cuni.cz