20. ročník, úloha VI . S ... ***lineární harmonický oscilátor ve vnějším poli*** *(6 bodů; průměr 6,00; řešili 3 studenti)*

Uvažujme lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\widehat{H}_0 = \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 \widehat{X}^2 \,.$$

a) Určete maticové elementy

$$X_{mn} = \langle m|\widehat{X}|n\rangle \,, \qquad P_{mn} = \langle m|\widehat{P}|n\rangle \,,$$

kde $|n\rangle$ (resp. $|m\rangle$) jsou vektory zkonstruované v textu seriálu.

b) Vypočítejte střední hodnotu energie ve stavu $|n\rangle$ a určete, jaká část této energie pochází od kinetického členu $\widehat{P}^2/2M$ a jaká od členu potenciální energie $M\omega^2\widehat{X}^2/2$.

Vložme celý systém do slabého homogenního elektrického pole. Interakce se systémem je pak popsána hamiltoniánem

$$\widehat{H}' = -F\widehat{X} \,,$$

kde F je konstanta a platí $\widehat{H}' \ll \widehat{H}_0$.

c) Vypočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii n-té hladiny.

d) Řešte tuto úlohu přesně a srovnejte výsledek s poruchovým řešením.
Nápověda: Jak neporušený hamiltonián $\widehat{H}_0$, tak i celkový hamiltonián $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}'$ jsou translačně invariantní, tj. hodnota energie se nezmění, pokud operátor souřadnic posuneme o konstantní hodnotu $\widehat{X} \to \widehat{X} - \xi$.

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Podle seriálu je rozpis operátorů $\widehat{X}$ a $\widehat{P}$ pomocí kreačních a anihilačních operátorů

$$\widehat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(a + a^\dagger) \,, \quad \widehat{P} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}(a^\dagger - a) \,.$$

Maticové elementy operátorů potom jsou

$$X_{mn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\langle m|a^\dagger + a|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}) \,,$$

$$P_{mn} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}\langle m|a^\dagger - a|n\rangle = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}) \,.$$

Tento výsledek mimo jiné znamená, že diagonální maticové elementy těchto operátorů jsou vždy nulové,

$$\langle n|\widehat{X}|n\rangle = \langle n|\widehat{P}|n\rangle = 0 \,.$$

b) Pro střední hodnotu kinetické energie ve stavu $|n\rangle$ dostaneme

$$\langle n|\frac{\widehat{P}^2}{2M}|n\rangle = -\frac{\hbar\omega}{4}\langle n|(a^\dagger - a)^2|n\rangle = -\frac{\hbar\omega}{4}\langle n|a^\dagger a^\dagger + aa|n\rangle + \frac{\hbar\omega}{4}\langle n|a^\dagger a + aa^\dagger|n\rangle \,.$$

První člen je nulový a druhý se dá pomocí komutační relace $[a, a^\dagger] = 1$ upravit, vyjde tedy

$$\langle n|\frac{\widehat{P}^2}{2M}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\langle n|a^\dagger a|n\rangle + \frac{\hbar\omega}{4}\langle n|n\rangle = \frac{n\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \,.$$

Zcela identickým postupem dostaneme

$$\langle n|\frac{1}{2}M\omega^2\widehat{X}^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Pro celkovou energii poté platí

$$\langle n|\widehat{H}_0|n\rangle = \langle n|\frac{\widehat{P}^2}{2M}|n\rangle + \langle n|\frac{1}{2}M\omega^2\widehat{X}^2|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

c) Podle seriálu dostáváme opravu k energii v prvním řádu poruchové teorie

$$\Delta E_n = \langle n|\widehat{H}'|n\rangle = -F\langle n|\widehat{X}|n\rangle\,.$$

Tento maticový element již známe – je nulový, jak bylo ukázáno v úloze a). Pro první opravu energie tedy platí $\Delta E_n = 0$.

d) Hamiltonián systému je dle zadání

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}' = \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M^2\omega^2\widehat{X}^2 - F\widehat{X}\,.$$

Nápověda říká, že tento hamiltonián je translačně invariantní, tj. při změně $\widehat{X} \to \widehat{X} - \xi$ se energetické spektrum nezmění. Udělejme tedy substituci $\widehat{X} = \widehat{X}' + \xi$,

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M^2\omega^2(\widehat{X}'+\xi)^2 - F(\widehat{X}'+\xi) = \\ &= \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M^2\omega^2\widehat{X}'^2 + (M^2\omega^2\xi - F)\widehat{X}' + \frac{1}{2}M^2\omega^2\xi^2 - F\xi\,.\end{aligned}$$

Konstanta ξ je libovolná, tj. zvolme ji jako $\xi = F/(M^2\omega^2)$. Hamiltonián nabude tvaru

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M^2\omega^2\widehat{X}'^2 - \frac{F^2}{2M^2\omega^2} = \widehat{H}'_0 - \frac{F^2}{2M^2\omega^2}\,.$$

Díky translační invarianci platí

$$\langle n|\widehat{H}'_0|n\rangle = \langle n|\widehat{H}_0|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Vidíme tedy, že při vložení do konstantního vnějšího pole se celé energetické spektrum posune o energii $\Delta E_n = -F^2/(2M^2\omega^2)$. Ačkoliv první řád poruchové teorie dává nulovou opravu, skutečná změna energie je nenulová. Můžeme tedy říci, že tato změna je efekt vyššího řádu.

Jarda Trnka
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.