20. ročník, úloha VI . 4 ... zákrytová dvojhvězda *(4 body; průměr 3,28; řešilo 18 studentů)*

Magnituda jisté zákrytové dvojhvězdy se mění se čtyřdenní periodou v této posloupnosti:

vedlejší minimum	$m = 3{,}5$,
maximum	$m = 3{,}3$,
hlavní minimum	$m = 4{,}2$,
maximum	$m = 3{,}3$.

Větší složka této dvojhvězdy má také vyšší teplotu než její průvodce. Za předpokladu, že Země leží v oběžné rovině dvojhvězdy, vypočítejte magnitudy jednotlivých složek a poměr jejich délkových rozměrů. Převodní vztah mezi magnitudou m hvězdy a osvětlením E, které způsobuje, je

$$m = -2{,}5\,\log\left(E/E_0\right),$$

kde E_0 je pevně definovaná hodnota. *Nepoužitá úloha z archivu.*

Podívejme se nejprve, jak probíhá dění v soustavě námi zkoumané dvojhvězdy. Tento systém obíhá kolem společného těžiště. Během jednoho oběhu nastanou pro vzdáleného pozorovatele čtyři zajímavé fáze:

(a) Menší hvězda se nachází před velkou, ale protože je chladnější, vnímáme to jako pokles osvětlení. V tomto okamžiku k nám přichází nejméně světla vůbec. Nastává hlavní minimum.

(b) Větší z obou hvězd zcela zakryje tu menší. Vidíme tedy pouze světlo z jedné hvězdy, proto lze říci, že magnituda odpovídající vedlejšímu minimu je zároveň magnitudou $m_1 = 3{,}5$ velké hvězdy.

(c) Menší hvězda je vedle velké tak, že se z našeho pohledu navzájem nepřekrývají. Tato situace tedy nastává dvakrát během jednoho oběhu. V těchto okamžicích pozorujeme světlo od obou hvězd na největší ploše, proto dochází k minimální magnitudě (tj. maximum jasnosti).

Po této analýze se můžeme směle pustit do dalších výpočtů. Domluvme se, že dále budeme indexovat velkou hvězdu jako 1 a malou pak 2. Pokračujme studiem třetí situace v pořadí. Během ní se osvětlení od obou hvězd prostě sčítá, tedy

$$3{,}3 = -2{,}5\,\log\left(\frac{E_1+E_2}{E_0}\right).$$

Kromě toho můžeme určit i osvětlení E_1 velké hvězdy ze vztahu

$$3{,}5 = -2{,}5\,\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right),$$

neboť známe její magnitudu. Z výše uvedených rovnic lze po úpravách vyjádřit osvětlení E_2 menší hvězdy

$$E_1 = 10^{-3{,}5/2{,}5}E_0\,,\quad E_2 = 10^{-3{,}3/2{,}5}E_0 - E_1 = E_0\left(10^{-3{,}3/2{,}5} - 10^{-3{,}5/2{,}5}\right),$$

pomocí něhož již snadno zjistíme její magnitudu

$$m_2 = -2{,}5\,\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = -2{,}5\,\log\left(10^{-3{,}3/2{,}5} - 10^{-3{,}5/2{,}5}\right) \doteq 5{,}2\,.$$

Nyní nastal čas, abychom do našeho řešení také zapojili poloměry r_1, r_2 obou hvězd. Využijeme k tomu situaci, kdy se menší ze složek nachází z našeho pohledu před větší hvězdou. Víme, že osvětlení je úměrné velikosti plošného průmětu hvězdy, tedy obsahu kruhu πr^2. Osvětlení z dvojhvězdy v dané pozici jest

$$E' = E_2 + E_1 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) ,$$

protože z velké hvězdy vidíme pouze její část. Pro zjednodušení označme $\varrho \equiv r_2/r_1$ hledaný poměr velikostí. Jako vždy platí vzorec ze zadání, tedy

$$4{,}2 = -2{,}5 \log \left(\frac{E'}{E_0}\right) = -2{,}5 \log \left(\frac{E_2 + E_1(1 - \varrho^2)}{E_0}\right) .$$

Rovnost stačí odlogaritmovat, dosadit za E_1 a E_2 a dostaneme

$$10^{-4{,}2/2{,}5} = \left(10^{-3{,}3/2{,}5} - 10^{-3{,}5/2{,}5}\right) + 10^{-3{,}5/2{,}5}(1 - \varrho^2) ,$$

odkud již vede přímá cesta k výsledku

$$\varrho = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{10^{-3{,}3/2{,}5} - 10^{-4{,}2/2{,}5}}{10^{-3{,}5/2{,}5}}} \doteq 0{,}82 .$$

Naše výsledky ještě shrňme do následujícího závěru. Za daných zjednodušujících podmínek je magnituda větší hvězdy 3,5, menší potom 5,2 a poměr jejich poloměrů menší ku větší vychází přibližně 0,82.

Tomáš Jirotka
`byrot@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.