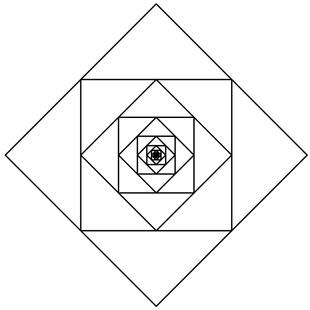
20. ročník, úloha VI . 3 ... *čtverák čtverec* *(4 body; průměr 2,73; řešilo 15 studentů)*

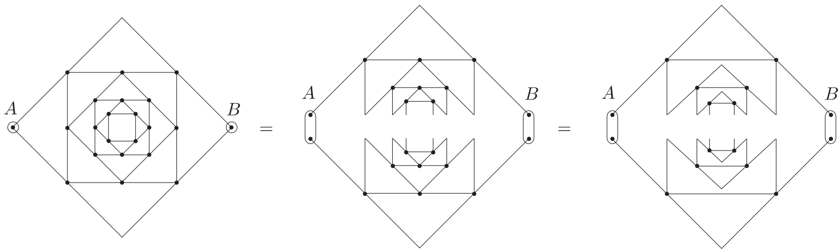
Obvod na obrázku 1 vznikne spojením nekonečně mnoha drátěných čtverců, přičemž každý následující je $\sqrt{2}$-krát menší. Drát, ze kterého je obvod vyroben, o délce rovné straně největšího čtverce má odpor R. Určete odpor obvodu mezi krajními body vlevo a vpravo. *Úlohu vymyslel Marek Pechal.*



Obr. 1. Drátěná síť neznámého odporu.

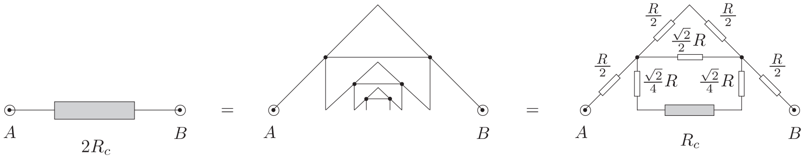
V prvé řadě si uvědomíme několik skutečností plynoucích ze symetrie úlohy. Vedeme-li totiž osu symetrie vstupním a výstupním vrcholem čtverce (označme si je dále A a B), pak kvůli symetrii neteče mezi takto vzniklými půlkami obvodu žádný proud. Nic se tedy nestane, pokud obvod podélně rozdělíme na dva stejné paralelně spojené obvody (jak ukazuje první „rovnost“ ve schématickém obrázku 2).

Dále si všimneme uzlů ležících na ose úsečky AB. Na těch je zřejmě potenciál rovný aritmetickému průměru potenciálů ve vrcholech A a B. Ze symetrie vzhledem k řečené ose také plyne, že napětí na vzájemně si odpovídajících úsecích obvodu jsou stejná, a tedy jsou si rovny i proudy protékající odpovídajícími si větvemi. Proto v uvažovaných uzlech neprochází proud mezi čtverci, které se zde stýkají (jinými slovy – proud, který přiteče po straně většího čtverce, po ní také odteče; stejně tak pro menší čtverec). Oba čtverce můžeme tedy od sebe v těchto uzlech oddělit, aniž by se změnil celkový odpor obvodu. Tuto skutečnost vyjadřuje druhá z „rovností“ v obrázku 2.



Obr. 2. Rozdělení obvodu

Nyní využijeme toho, že takto upravená půlka původního obvodu, která má odpor $2R_\mathrm{c}$ (označuje-li R_c hledaný odpor celého čtverce), obsahuje jako svou část dvakrát menší kopii sebe sama samozřejmě o dvakrát menším odporu R_c. Pak mají ovšem obvody znázorněné na obrázku 3 stejný odpor, a to právě $2R_c$.



Obr. 3. Výpočet odporu obvodu

Takto dostaneme následující rovnici

$$2R_\mathrm{c} = R + \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R} + \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R + R_\mathrm{c}}}\,.$$

Zavedením označení x pro poměr R_c/R pak získáme

$$\frac{1}{2x-1} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + x}$$

a následnými úpravami předchozí rovnice přejde v kvadratickou

$$2(\sqrt{2}+1)x^2 + 2x - (\sqrt{2}+2) = 0\,.$$

Jejími řešeními jsou čísla (použité úpravy vyžadují trochu hraní s rozšiřováním zlomků a odmocninami)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}}{4(\sqrt{2}+1)} = \frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{2}\,,$$

z nichž samozřejmě význam řešení zadané úlohy má pouze to se znaménkem plus (jinak by výsledný odpor byl záporný). Dostáváme tak výsledek

$$R_c = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,R\,.$$

Marek Pechal
marek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.