

20. ročník, úloha VI. 2 ... podivná atmosféra (4 body; průměr 3,07; řešilo 15 studentů)

Okolo planety o poloměru R se nachází atmosféra, jejíž index lomu se mění s výškou podle vztahu $n = n_0 - \alpha h$. Zjistěte, v jaké výšce h nad povrchem planety se světelný paprsek vyslaný tečně k povrchu bude pohybovat po kružnici okolo planety.

Úloha neznámého archivního původu.

Úlohu vyřešíme použitím zákona lomu. Atmosféru planety rozdělíme na tenoučké kulové vrstvy vzduchu o tloušťce dh s indexem lomu $n(h) = n_0 - \alpha h$, sousední vrstva má index lomu $n(h + dh) = n_0 - \alpha(h + dh)$. Má-li se paprsek šířit po kružnici, musí dopadat na rozhraní dvou vrstev pod mezním úhlem φ_m . Zákon lomu říká

$$\sin \varphi_m = \frac{n_0 - \alpha(h + dh)}{n_0 - \alpha h}.$$

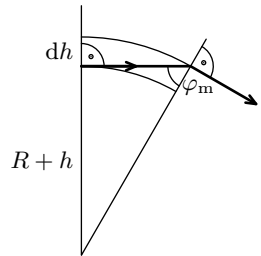
Z geometrie problému (viz obr. 1) plyne

$$\sin \varphi_m = \frac{R + h}{R + h + dh} = \left(1 + \frac{dh}{R + h}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{dh}{R + h},$$

kde jsme využili přibližného vztahu $(1 + dh)^{-1} \approx 1 - dh$, který platí pro malé dh . Porovnáním odvozených vztahů dostaneme

$$h = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}.$$

Zbývá dodat, že kruhová orbita existuje pro $n_0/\alpha > R$. Úloha nebyla obtížná a většina řešitelů ji vyřešila správně.



Obr. 1. Lom paprsku

Zdeněk Kučka

zdenek@fykos.mff.cuni.cz