20. ročník, úloha V . S ... *spin-orbitální interakce* *(6 bodů; průměr 5,40; řešilo 5 studentů)*

Elektron je částice se spinem $\frac{1}{2}$ popsaným operátorem $\widehat{\boldsymbol{S}}$. Kromě spinu však může mít i orbitální moment hybnosti popsaný operátorem $\widehat{\boldsymbol{L}}$ a kvantovým číslem l. Celkový impulsmoment částice je pak definován jako

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = \widehat{\boldsymbol{S}} + \widehat{\boldsymbol{L}}\,.$$

Předpokládejte, že se elektron nachází v druhém excitovaném stavu ($l = 2$).

a) *Určete možné velikosti celkového impulsmomentu j a kolikrát jsou tyto hodnoty degenerovány, tj. kolik vektorů $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$ odpovídá danému j.*
b) *Projekce na třetí osu jsou $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$. Stanovte, jaký celkový spin j a jeho projekci j_3 na třetí osu můžeme naměřit, a určete příslušné pravděpodobnosti.*

Zajímavým jevem je samointerakce elektronu sama se sebou, a to právě prostřednictvím jeho impulsmomentů. Přesně řečeno spin interaguje s orbitálním momentem hybnosti. Tato spin-orbitální interakce je popsána hamiltoniánem

$$\widehat{H}_{so} = a(\widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \widehat{\boldsymbol{L}})\,,$$

kde a je konstanta a tečka představuje skalární součin dvou vektorů. V důsledku této interakce se energetické hladiny elektronu rozštěpí v závislosti na jeho spinové konfiguraci.

c) *Pokud je energie elektronu bez spin-orbitální interakce E_0 a orbitální moment hybnosti $l = 2$, určete vzdálenost rozštěpených energetických hladin.*
d) *S jakou pravděpodobností tyto energie naměříme pro stav s projekcemi na třetí osu $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$?*

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Pro velikost celkového impulsmomentu máme jen dvě možnosti: $j = \frac{5}{2}$ a $j = \frac{3}{2}$. Degenerace je pak určena počtem stavů $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$, které tvoří bázi příslušného podprostoru. Pro $j = \frac{5}{2}$ máme

$$\begin{aligned}
j_3 &= \pm\tfrac{5}{2}: && |2,\pm 2\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle && && \text{2 stavy;}\\
j_3 &= \pm\tfrac{3}{2}: && |2,\pm 1\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle\,, && |2,\pm 2\rangle|\tfrac{1}{2},\mp\tfrac{1}{2}\rangle && \text{4 stavy;}\\
j_3 &= \pm\tfrac{1}{2}: && |2,\pm 1\rangle|\tfrac{1}{2},\mp\tfrac{1}{2}\rangle\,, && |2,0\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle && \text{4 stavy.}
\end{aligned}$$

To dává dohromady celkem 10 různých stavů. Obdobně pro $j = \frac{3}{2}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
j_3 &= \pm\tfrac{3}{2}: && |2,\pm 2\rangle|\tfrac{1}{2},\mp\tfrac{1}{2}\rangle\,, && |2,\pm 1\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle && \text{4 stavy;}\\
j_3 &= \pm\tfrac{1}{2}: && |2,\pm 1\rangle|\tfrac{1}{2},\mp\tfrac{1}{2}\rangle\,, && |2,\pm 0\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle && \text{4 stavy.}
\end{aligned}$$

V tomto případě dostaneme 8 různých stavů. To tedy znamená, že hodnota $j = \frac{5}{2}$ je 10krát degenerovaná, zatímco $j = \frac{3}{2}$ je 8krát degenerovaná.

b) Velikost projekce celkového impulsmomentu na třetí osu máme pevně danou, $j_3 = l_3 + s_3 = -\frac{1}{2}$. Pomocí mašinérie C-G koeficientů pak dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned}
|l{=}2, l_3{=}{-1}\rangle|s{=}\tfrac{1}{2}, s_3{=}\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\cdot|j{=}\tfrac{5}{2}, j_3{=}{-\tfrac{1}{2}}, l{=}2, s{=}\tfrac{1}{2}\rangle +\\
+ \sqrt{\tfrac{3}{5}}\cdot|j{=}\tfrac{3}{2}, j_3{=}{-\tfrac{1}{2}}, l{=}2, s{=}\tfrac{1}{2}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Příslušné pravděpodobnosti pro naměření velikosti celkového impulsmomentu jsou $p_{5/2} = 0{,}4$ a $p_{3/2} = 0{,}6$.

c) K určení energií rozštěpených hladin je vhodné vztah pro spin-orbitální interakci vtipně upravit

$$\widehat{\boldsymbol{J}}^2 = (\widehat{\boldsymbol{L}} + \widehat{\boldsymbol{S}})^2 = \widehat{\boldsymbol{L}}^2 + 2(\widehat{\boldsymbol{L}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}) + \widehat{\boldsymbol{S}}^2 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{L}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{J}}^2 - \widehat{\boldsymbol{L}}^2 - \widehat{\boldsymbol{S}}^2)\,.$$

Odtud je zřejmé, že vlastními stavy poruchy hamiltoniánu $\widehat{H}_{\mathrm{so}}$ budou právě stavy $|j, j_3, l, s\rangle$. Vlastní hodnoty celkového hamiltoniánu $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{\mathrm{so}}$ pak budou

$$\widehat{H}|j, j_3, l, s\rangle = E_0 + \frac{a}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right]\,.$$

Konkrétně pro $l = 2$, $s = \frac{1}{2}$ máme

$$\widehat{H}|\tfrac{5}{2}, j_3, 2, \tfrac{1}{2}\rangle = (E_0 + a)|\tfrac{5}{2}, j_3, 2, \tfrac{1}{2}\rangle\,,$$
$$\widehat{H}|\tfrac{3}{2}, j_3, 2, \tfrac{1}{2}\rangle = (E_0 - \tfrac{3}{2}a)|\tfrac{3}{2}, j_3, 2, \tfrac{1}{2}\rangle\,.$$

Vzdálenost rozštěpených hladin je $5a/2$.

d) Pravděpodobnosti naměření těchto energií přesně kopírují výsledky z úlohy b). Velikosti spinu a orbitálního impulsmomentu jsou zadány, záleží pouze na velikosti celkového impulsmomentu. Platí tedy $p(E_0 + a) = 0{,}4$ a $p(E_0 - 3a/2) = 0{,}6$.

Na závěr malou poznámku k došlým řešením, kterých věru nebylo mnoho. Ti, kteří vyřešili i tuto úlohu, si zaslouží uznání. Věřím, že počítání C-G koeficientů vás bavilo, a opravdovým fajnšmekrům doporučuji si příklad přepočítat pro částici se spinem 2 a orbitálním impulsmomentem $\frac{7}{2}$ `:-)`.

Jarda Trnka
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.