**20. ročník, úloha IV . S ... *spinová precese*** *(6 bodů; průměr 5,00; řešilo 6 studentů)*

*Uvažujme částici se spinem 1/2 v magnetickém poli, které míří ve směru osy $z$, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$, a zanedbejme všechny stupně volnosti kromě těch spinových. Jako jeden příklad báze, kterou zde můžeme zvolit, je dvojice vektorů s ostrou hodnotou projekce spinu na osu $z$: $|S_3 = 1/2\rangle$, $|S_3 = -1/2\rangle$. Hamiltonián příslušný této částici lze napsat ve tvaru*

$$\widehat{H} = \hbar\omega\widehat{S}_3\,,$$

*kde $\omega = eB/2m$.*

a) *Napište vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu $\widehat{H}$. Určete, jak působí hamiltonián na obecný vektor $|\psi\rangle = a|S_3 = 1/2\rangle + b|S_3 = -1/2\rangle$. Taktéž vypočtěte, jak působí operátor*

$$\widehat{U}(t, 0) = \exp(-i\widehat{H}t/\hbar)\,.$$

b) *Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou $z$-ové projekce spinu, tj. $|\psi(0)\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$. Určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$ a s jakou pravděpodobností naměříme částici ve stavu $|S_3 = 1/2\rangle$ a s jakou v $|S_3 = -1/2\rangle$.*
c) *V případě, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu $y$ nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$, určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$. Určete také pravděpodobnosti, že při měření spinu ve směru $y$ naměříme hodnoty $+1/2$, resp. $-1/2$.*

*Definujme střední hodnotu operátoru vztahem*

$$\langle\widehat{A}\rangle = \sum_j w_j A_j\,,$$

*kde $w_j$ je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu $A_j$. (Rozmyslete si, že je to přirozená definice střední hodnoty.) Předpokládejte, že se v čase $t = 0$ nachází částice ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu $y$ nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$.*

d) *Určete střední hodnoty operátorů spinu, tj. $\langle\widehat{S}_1\rangle$, $\langle\widehat{S}_2\rangle$ a $\langle\widehat{S}_3\rangle$ v čase $t = 0$.*
e) *Ty samé střední hodnoty vypočtěte v čase $t = \tau$. Okomentujte, jak výsledek souvisí s názvem úlohy.*

*Zadal autor seriálu Jarda Trnka.*

a) Protože hamiltonián je až na násobení reálným číslem $\hbar\omega$ přímo operátor třetí komponenty impulsmomentu $\widehat{S}_3$, má s ním společné vlastní vektory a vlastní čísla jsou

$$\widehat{H}|S_3 = 1/2\rangle = E_+|S_3 = 1/2\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = 1/2\rangle\,,$$
$$\widehat{H}|S_3 = -1/2\rangle = E_-|S_3 = -1/2\rangle = -\tfrac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = -1/2\rangle\,.$$

Působení hamiltoniánu na obecný vektor $|\psi\rangle$ je nyní už jasné.

Operátor $\widehat{U}(t, 0)$ je funkce $\widehat{H}$. Ze seriálu víme, že vlastní vektory jsou identické s vlastními vektory $\widehat{H}$. Vlastní čísla pak nejsou nic jiného než příslušné funkce energie.

$$\widehat{U}(t, 0)|S_3 = 1/2\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}E_+t/\hbar\right)|S_3 = 1/2\rangle = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega t\right)|S_3 = 1/2\rangle\,,$$
$$\widehat{U}(t, 0)|S_3 = -1/2\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}E_-t/\hbar\right)|S_3 = -1/2\rangle = \exp\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega t\right)|S_3 = -1/2\rangle\,.$$

b) Operátor časového vývoje z času $t = 0$ do času $t = \tau$ je pro náš systém přesně $\widehat{U}(\tau, 0)$ (proto jsme ho v první úloze zkonstruovali). Už víme, jak působí na vektory $|S_3 = \pm 1/2\rangle$, které jsou pro něj vlastními. Tudíž pro vektor $|\psi(0)\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$ dostaneme

$$|\psi(\tau)\rangle = \widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = 1/2\rangle = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle \,.$$

Bystrým okem snadno nahlédneme, že je to náš starý dobrý vektor $|S_3 = 1/2\rangle$ pouze vynásobený fázovým faktorem. Proto nás nepřekvapí, že pravděpodobnost, že naměříme v čase $t = \tau$ hodnotu $z$-ové komponenty spinu $+1/2$, bude

$$w_+ = \left|\langle S_3 = 1/2|\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle\right|^2 = 1\,.$$

Logicky pak $w_- = 0$. Analogický výsledek bychom dostali i pro počáteční stav $|S_3 = -1/2\rangle$. Tento výsledek má obecnější platnost. Vektor se až na fázový faktor při časovém vývoji nemění, pokud je vlastním vektorem operátoru časového vývoje.

c) Zde je výhodné rozložit si vektor $|S_2 = 1/2\rangle$ do báze tvořené vektory $|S_3 = \pm 1/2\rangle$. Vybaveni znalostmi ze seriálu nebudeme mít s tímto rozkladem problém.

$$|S_2 = 1/2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = 1/2\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -1/2\rangle\,.$$

Analogicky pro druhý z vektorů platí

$$|S_2 = -1/2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = 1/2\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -1/2\rangle\,.$$

Časový vývoj je opět zprostředkován operátorem $\widehat{U}(\tau, 0)$, kterým zapůsobíme na vektor $|\psi(0)\rangle = |S_2 = 1/2\rangle$. A teď je již jasné, proč je rozklad do námi zvolené báze výhodný.

$$\begin{aligned}|\psi(\tau)\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = 1/2\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = -1/2\rangle = \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = -1/2\rangle\,.\end{aligned}$$

Pravděpodobnosti naměření $y$-ové komponenty spinu $\pm 1/2$ potom jsou

$$\begin{aligned}w_+ &= \left|\langle S_2 = 1/2|\psi(\tau)\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{4}\left|\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right) + \exp\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)\right|^2 = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\omega\tau\right)\,,\\ w_- &= \left|\langle S_2 = -1/2|\psi(\tau)\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{4}\left|\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right) - \exp\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)\right|^2 = \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\omega\tau\right)\,.\end{aligned}$$

d) Velmi podobným postupem, jakým jsme řešili předchozí úlohy, budeme pokračovat i zde. Z definice dostaneme pro střední hodnotu operátoru $\widehat{S}_i$ v čase $t = 0$

$$\begin{aligned}\langle\widehat{S}_1\rangle &= \left|\langle S_1 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\tfrac{1}{2} + \left|\langle S_1 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0\,,\\ \langle\widehat{S}_2\rangle &= \left|\langle S_2 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\tfrac{1}{2} + \left|\langle S_2 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\,,\\ \langle\widehat{S}_3\rangle &= \left|\langle S_3 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\tfrac{1}{2} + \left|\langle S_3 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle\right|^2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že jsme dostali přesně to, co bychom intuitivně očekávali.

e) Podstatně zajímavější je situace v případě, že necháme systém časově vyvíjet. Postup výpočtu je však zcela analogický. Systém tentokrát nemáme popsaný počátečním vektorem $|\psi(0)\rangle = |S_2 = 1/2\rangle$, ale časově vyvinutým vektorem $|\psi(\tau)\rangle$, který již známe

$$|\psi(\tau)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega\tau\right)|S_3 = -1/2\rangle\,.$$

Počítáním maticových elementů dostaneme

$$\langle \widehat{S}_1 \rangle = |\langle S_1 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \tfrac{1}{2} + |\langle S_1 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\sin\omega\tau\,,$$
$$\langle \widehat{S}_2 \rangle = |\langle S_2 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \tfrac{1}{2} + |\langle S_2 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\cos\omega\tau\,,$$
$$\langle \widehat{S}_3 \rangle = |\langle S_3 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \tfrac{1}{2} + |\langle S_3 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0\,.$$

Tyto výsledky ospravedlňují název úlohy. Střední hodnoty spinového vektoru „konají“ precesní pohyb v rovině $xy$, střední hodnota projekce na osu $z$ zůstává neměnná.

***Jarda Trnka***
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.