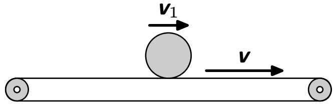
20. ročník, úloha IV . 1 ... *nakupujeme minerálky* *(4 body; průměr 2,21; řešilo 19 studentů)*

Určitě jste si v super(hyper)marketu všimli, že plastová láhev oblíbeného nápoje se při rozjetí pohyblivého pásu pokladny začne otáčet a k pokladní ji často musíte postrčit až rukou. Proč to tak je?

Zkuste analyzovat následující modelový případ. Láhev je položena na pás osou kolmo na směr pohybu pásu a láhev i pás jsou v klidu. Náhle se pás rozjede konstantní rychlostí $v = 10\,\mathrm{cm/s}$. Jakou výslednou rychlostí se bude pohybovat láhev? Nejdříve analyzujte, jak se budou chovat různé idealizace – jako třeba tuhý válec. Pak si uvědomte, že láhev je plná nápoje, který se nerad otáčí. Pro jednoduchost uvažujte viskozitu nápoje za nulovou, pak se zamyslete nad tím, jak do hry vstoupí viskozita.



Obr. 1. Láhev na pásu.

Úlohu vymyslel Jano Lalinský na nákupu v TESCU.

Představme si, že na pásu, který je v klidu, leží válec; dejme tomu, že má poloměr R, hmotnost m a moment setrvačnosti I. Teď se najednou pás rozjede rychlostí o velikosti v.[1] Jakou rychlostí v_1 se bude pohybovat válec? (Protože válec se bude otáčet, za v_1 bereme souřadnici rychlosti jeho hmotného středu.) Rozjetí pásu trvá krátkou dobu Δt, během ní pás působí na válec proměnnou silou a dodá mu impulz Δp ve směru pohybu pásu. Spolu s impulzem ovšem válec získá i moment hybnosti $\Delta L = R\Delta p$. Dále předpokládáme, že válec se bude otáčet bez prokluzu. Z tohoto důvodu dolní bod válce, který se dotýká pásu, bude mít stejnou rychlost v jako pás. Z první impulzové věty vyplývá, že dodaný impulz se rovná změně hybnosti válce

$$\Delta p = mv_1\,. \tag{1}$$

Podle druhé impulzové věty platí

$$R\Delta p = I\omega\,. \tag{2}$$

Jaká je úhlová rychlost ω válce, jehož dolní bod se pohybuje rychlostí v a střed rychlostí v_1? Pokud se budeme pohybovat spolu s válcem rychlostí v_1, uvidíme, že jeho dolní bod se pohybuje rychlostí $v - v_1$, a tedy úhlová rychlost válce je $\omega = (v - v_1)/R$.[2] Po dosazení úhlové rychlosti do poslední rovnice obdržíme

$$R\Delta p = I\,\frac{v - v_1}{R}\,.$$

Z první rovnice vyjádříme Δp, dosadíme do poslední, vyjádříme v_1 a dostáváme

$$v_1 = \frac{I}{I + mR^2}\,v\,. \tag{3}$$

Jak se budou podle tohoto vzorečku chovat různá tělesa? Tenký válec (např. prázdná PET láhev) má moment setrvačnosti mR^2, tudíž jeho výsledná rychlost bude $\frac{1}{2}v = 5{,}0\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$, tj. polovina rychlosti pásu; v případě plného válce je moment setrvačnosti $mR^2/2$ a výsledná

[1] Jak funguje automatický posun pásu? Na jeho konci je snímač, který hlídá, zda je na konci nějaké zboží. Pokud tam je, pás se zastaví; pokud pokladní sebere zboží z cesty infračerveného paprsku snímače, pás se rozjede.

[2] Úhlová rychlost je stejná v každé inerciální soustavě, protože když těleso otočíme o úhel φ v jedné, v druhé je toto otočení stejné.

rychlost bude 1/3 rychlosti pásu, tedy vždy méně než rychlost pásu. Krátké zamyšlení potvrdilo naše zkušenosti z nákupů.

Jak to ale dopadne se skutečnou láhví s minerálkou? Pro jednoduchost předpokládejme, že láhev je zcela vyplněna nápojem, takže nebudou nastávat problémy se šplícháním vody uvnitř. Těsně po rozjezdu se láhev pohybuje rychlostí v_1 a plastový obal se ještě k tomu otáčí, ale nápoj uvnitř ne! (Část kapaliny se přece jen trochu otáčí, protože kapalina blízko stěny láhve sleduje pohyb stěny; pokud je však láhev dostatečně široká, většina kapaliny je daleko od stěn a tento efekt můžeme zanedbat.) Označme hmotnost plastového obalu m_o a hmotnost nápoje m_n; platí $m = m_\mathrm{o} + m_\mathrm{n}$. Protože se po rozjetí pásu otáčí jen obal, celkový moment hybnosti je dán jen momentem hybnosti plastového obalu. To můžeme do rovnic zahrnout tak, že celý moment setrvačnosti láhve je moment setrvačnosti obalu $I = m_\mathrm{o}R^2$. Ten dosadíme do posledního vztahu (3) a pro rychlost láhve dostaneme

$$v_1 = \frac{m_\mathrm{o}}{2m_\mathrm{o} + m_\mathrm{n}}\, v \approx \frac{m_\mathrm{o}}{m_\mathrm{n}}\, v\,,$$

poněvadž poměr $m_\mathrm{o}/m_\mathrm{n}$ je řádu 10^{-2}. Při rychlosti $v_1 \approx 0{,}1\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ by prodavačka na láhev čekala několik desítek minut.

Podívejme se na láhev z hlediska soustavy spojené s pásem. Obal se otáčí a láhev se valí po pásu rychlostí $v_1 - v$. Protože kapalina je viskózní, části kapaliny v láhvi se třou o sebe a uvádějí se do otáčivého pohybu. Tření v kapalině vzniká pouze, pokud se jednotlivé válcové vrstvy kapaliny pohybují různými rychlostmi. Po nějaké době by se měl vzájemný pohyb vrstev zastavit, a tudíž by se měla láhev pohybovat, jako by byla tuhým tělesem.

Předpokládejme na chvíli, že při valení nepůsobí na láhev žádný valivý odpor. Rychlost láhve a úhlová rychlost obalu se samozřejmě v průběhu roztáčení vody uvnitř láhve mění. Po celou dobu roztáčení a ustalování kapaliny uvnitř láhve působí pás na láhev nenulovou silou. Teď byly impulz a moment hybnosti dodány láhvi během dlouhé doby, po ustálení však opět platí rovnice (1) a (2). Moment setrvačnosti celé láhve je po ustálení kapaliny $I = m_\mathrm{o}R^2 + m_\mathrm{n}R^2/2$ a pro výslednou rychlost dostáváme

$$v_2 = \frac{2m_o + m_n}{4m_o + 3m_n}\, v \approx \frac{1}{3}\, v\,.$$

Pokud tedy počkáme, až se pohyb tekutiny v láhvi ustálí, láhev se bude pohybovat jako tuhý válec a její výsledná rychlost bude přibližně 1/3 rychlosti pásu, což je stejný výsledek, jaký jsme dostali pro tuhý válec.

Ale pozor! Jsou tu i jiné vlivy, jako třeba valivý odpor. Ten způsobí, že po dost dlouhé době se všechna tělesa vzhledem k pásu zastaví, přestanou se otáčet a budou unášena rychlostí pásu dál. Můžeme si teď položit zajímavou otázku. Který vliv bude podstatnější pro pohyb – viskozita nebo valivý odpor? Pokud bude významnější valivý odpor, fáze pohybu s rychlostí $\frac{1}{3}v$ popsaná výše vůbec nenastane; válec to po chvíli roztáčení vody vzdá a začne se pohybovat bez otáčení stejnou rychlostí jako pás.

Přesně odpovědět na tuto otázku je obtížné, museli bychom řešit pohybovou rovnici pro obal a nápoj v něm. Můžeme však alespoň orientačně říct, který vliv je dominantní podle toho, jak dlouho mu trvá, než se projeví.

Za jakou dobu se díky viskozitě roztočí celý obsah láhve na stejnou úhlovou rychlost? Pomoci si můžeme rozměrovou analýzou. Očekáváme, že doba bude úměrná poloměru válce (malý válec se musí roztočit hned), nepřímo úměrná viskozitě (s velkou viskozitou je čas nulový) a jistě i úměrná hustotě (těžší kapalina má větší setrvačnost). Jedinou veličinou s rozměrem času, kterou můžeme jednoduše zkonstruovat z veličin R, ϱ a η, je $t_1 = \varrho R^2/\eta$, její hodnota je pro dvoulitrovou láhev vody asi $t_1 \approx 1\,\mathrm{h}$. To je až podezřele hodně, čekali bychom asi mnohem menší dobu. V tomto případě tedy rozměrová analýza nedává nejlepší výsledky. O valivém odporu víme, že normálně se na nepohyblivé podložce láhev zastaví v průběhu několika sekund. Valivý odpor je tedy převládajícím vlivem nad viskozitou a přechodný stav třetinové rychlosti nenastane. Láhev by se měla po chvíli přestat otáčet, to však, zdá se, neodpovídá skutečnosti. Častěji je možno vidět láhev stabilně se otáčet na místě. Proč, těžko říct. Svou roli zde může hrát zřejmě nerovnost podložky pásu (mírná prohlubeň vzniklá v místě kontaktu láhve a pásu) a možná i nerovnoměrnost chodu pásu (proměnná rychlost, vibrace, . . .).

Při čtení vašich řešení jsem byl překvapen, jak někteří z vás v této úloze využívali zákon zachování mechanické energie. Ten je sice pěkný a platí v několika akademických problémech s ideálními vazbami, ale ve skutečnosti se mechanická energie málokdy nezachovává. Opravdu fundamentální zákony jsou první a druhá věta impulzová. Někteří z vás použili speciální předpoklad, že během rozjíždění pásu na láhev působí třecí síla $F_\mathrm{t} = fN$. Tento předpoklad je nadbytečný, protože přesný charakter sil není podstatný. Navíc je pravděpodobně špatně, protože pro klidové tření platí $F_\mathrm{t} \leq fN$. Užitečný by byl až tehdy, kdyby bylo tření mezi láhví a pásem smykové a nás by zajímala doba, za kterou se láhev uvede do pohybu. Zajímavou otázkou tedy je, zda během rozjíždění pásu je tření mezi láhví a pásem skutečně klidové, nebo smykové povahy. Ale to už je jiná úloha.

Ján Lalinský
`jano@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.