

20. ročník, úloha III. E ... Planckova konstanta (8 bodů; průměr 5,33; řešilo 24 studentů)

Navrhněte a dostatečně teoreticky zdůvodněte metody k experimentálnímu určení Planckovy konstanty, které se dají realizovat doma, příp. s vybavením ve školní laboratoři, a alespoň jednu z nich proveďte. Všechny veličiny, které je možné experimentálně určit (zvažte užití statistiky), co nejpřesněji změřte a správně vyhodnoťte velikost této fundamentální konstanty s příslušnou experimentální chybou.

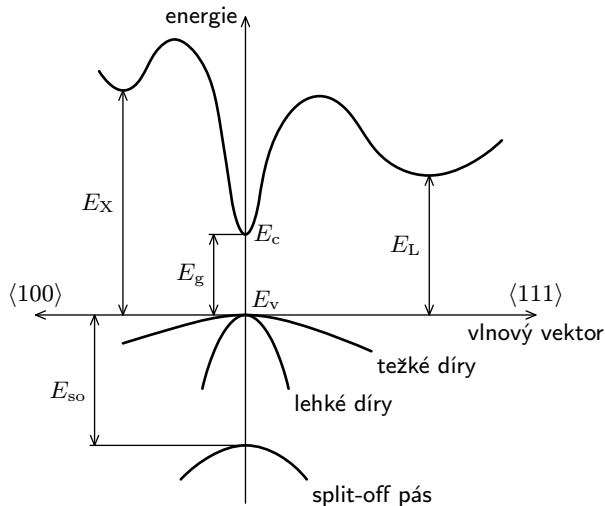
Nápověda: LED dioda s ochranným rezistorem stojí cca 5 Kč.

Experiment k seriálu navrhl Pavel Brom.

Experimentální určení fundamentální konstanty, jakou je Planckova konstanta, je obecně obtížné a v řešení se nevyhneme složité diskusi výsledků měření. Hlavní motivací k zařazení úlohy bylo téma seriálu, které nám na odlehčené úrovni dovolí vysvětlit potřebnou teorii. Uplatníme metodu doporučenou v zadání (užití LED diody), a proto se nejprve věnujme teorii polovodičů¹.

Teorie

Elektrony v atomech vyhovují Pauliho vylučovacímu principu – žádné dva elektrony se stejným spinem nemohou mít stejnou energii (přesněji stejná kvantová čísla). A tak elektrony obsazují energetické hladiny postupně od té nejnižší. Při nulové teplotě žádnou hladinu nevynechají, až po určitou energetickou mez jsou všechny hladiny zaplněné nad ní jsou hladiny neobsazené.



Obr. 1. Pásová struktura GaAs. Při teplotě 300 K je

$$E_g = 1,42 \text{ eV}, E_L = 1,71 \text{ eV}, E_X = 1,90 \text{ eV},$$

$$E_{so} = 0,34 \text{ eV}.$$

V pevných látkách se setkáváme s pozoruhodným jevem. Energetické hladiny elektronů jsou u sebe neuvěřitelně blízko, elektrony mohou prakticky nabývat spojité každé energie (to je důsledek toho, že v pevné látce je elektronů neuvěřitelně moc). Existují však intervaly energií,

¹⁾ O polovodičích si můžete více přečíst v seriálu 13. ročníku FYKOSu.

kteří jsou zakázané. Žádné elektrony nemohou mít energii z těchto intervalů. Závislost energie elektronu na vlnovém vektoru nazýváme pásové schéma (pásová struktura), neboť povolené a zakázané energie tvoří „pásky“.

U polovodičů je konfigurace elektronů právě taková, že mezi poslední obsazenou (jí odpovídá energie E_v) a první neobsazenou hladinou (energie E_c) je zakázaný pás – tzv. gap, jeho šířka je $E_g = E_c - E_v$. Nejvyššímu obsazenému pásu při nulové teplotě říkáme valenční pás a nejvyššímu neobsazenému pásu říkáme vodivostní pás (conducting band). V reálných polovodičích za běžných podmínek (např. nenulová teplota, vliv příměsí) dochází k difuzi elektronů – některé obsazené hladiny se vlivem tepelného pohybu uvolní a některé neobsazené se zaplní.

Pásovou strukturu nějakého polovodiče nelze vypočítat analyticky, ale pouze numerickými metodami na počítači. Příklad takto vypočítané pásové struktury polovodiče typu III-V galium-arsenid vidíte na obr. 1.

Ve vodivostním pásu $E \geq E_c$ může elektron libovolně zvyšovat svou energii (např. v elektrickém poli), protože v jeho sousedství je dostatek neobsazených hladin. Naopak ve valenčním pásu $E \leq E_v$ je elektron vázaný, okolní energetické hladiny jsou obsazené a nemůže na ně snadno přeskočit. U vodičů se valenční a vodivostní pás těsně dotýkají, tedy pouhým tepelným pohybem se elektron může uvolnit do vodivostního pásu a vést elektrický proud. U polovodičů se elektron může dostat z valenčního do vodivostního pásu absorpcí dostatečného množství energie např. absorpcí fotonu o energii E ,

$$E_g \leq E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kde h je Planckova konstanta a dále c rychlost, ν frekvence, λ vlnová délka světla v daném prostředí (můžeme předpokládat vakuum). Polovodiče a izolanty se liší velikostí zakázaného pásu (izolanty jej mají nejširší, orientačně větší než např. 5 eV). Různé typy polovodičů se pak liší opět šířkou zakázaného pásu E_g .

Užívané LED diody jsou vyrobené právě z polovodiče Ga-As, který má přímý přechod. To znamená, že postačí absorpce/emise fotonu bez nutnosti dodat/odebrat hybnost elektronu. (V pásovém schématu na obr. 1 to znamená, že minimum E_c se nachází přímo nad maximum E_v .) LED (light-emitting diode) využívá opačného přeskočení z vodivostního do valenčního pásu (jev se nazývá spontánní emise), přičemž je vyzářen foton o energii $E \geq E_g$. Nejprve je samozřejmě nutné potřebnou energii elektronu dodat k přeskočení do vodivostního pásu; již zmíněný proces tepelných kmitů je nedostačující, proto potřebnou práci W může vykonat elektrické pole způsobené přiloženým napětím U

$$W = E_g = eU, \quad (1)$$

kde e je absolutní hodnota náboje elektronu. S uvážením vztahů výše dostáváme obecně nerovnost

$$\frac{hc}{\lambda} \geq eU \Rightarrow h \geq \frac{e}{c} \cdot U\lambda. \quad (2)$$

Emitovanou vlnovou délku λ i napětí U můžeme v principu změřit (hůře najít v katalogu součástek). Jak víme, aby LED začala svítit, je na ni nutné přivést určité minimální napětí, jehož existenci již umíme vysvětlit rovností (1). V idealizovaném případě můžeme předpokládat, že napětí U odečteme při jeho zvyšování právě v okamžiku, kdy LED začne svítit, a potom by měla nastat rovnost. Všechny předpoklady však nezapomeneme okomentovat v diskusi.

Postup

K experimentu budeme potřebovat LED diodu, resp. několik různých barevných diod s ochranným rezistorem na použité napětí (aby jimi podle Ohmova zákona neprotékal proud nad cca 10 mA) a jako zdroj baterii s napětím větším než minimální nutné napětí. K regulaci napětí zapojíme proměnný rezistor s vhodným odporem jako potenciometr. Z měřidel si obstaráme voltmetr. K určení vlnové délky je nevhodnější spektrometr nebo monochromátor, díky němuž můžeme proměřit celé spektrum a poznatky o jeho průběhu využít do diskuse. Jinak se musíme spoléhat na údaj výrobce, resp. katalog. Experiment je nevhodnější provádět v temné komoře k co nejpresnějšímu nastavení napětí potenciometrem. K odečtu se bude hodit lampa či svítidla.

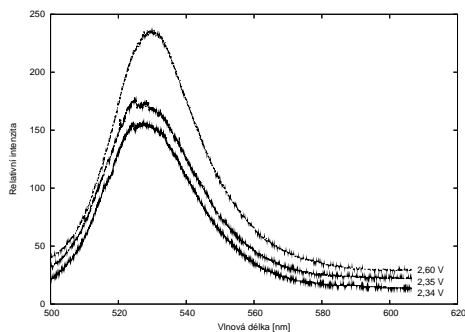
K baterii připojíme potenciometr a jezdec přesuneme k jednomu konci. Na tento konec a jezdec připojíme voltmetr a paralelně k němu ochranný odpor s LED diodou při správné polaritě v sérii. Experiment provádíme pokud možno za tmy; potenciometrem zvyšujeme napětí, dokud nezpozorujeme slabou emisi světla. Nastavené napětí U zaznamenáme, a jelikož jde o subjektivní měření, jeho nastavení a odečtení provedeme ještě několikrát pro statistické zpracování. Postup zopakujeme pro další diody s jinými barvami. Nechceme-li se spoléhat na udanou vlnovou délku, proměříme emisní spektrum použité LED diody na správně zkalibrovaném spektrometru (monochromátoru).

Výsledky měření

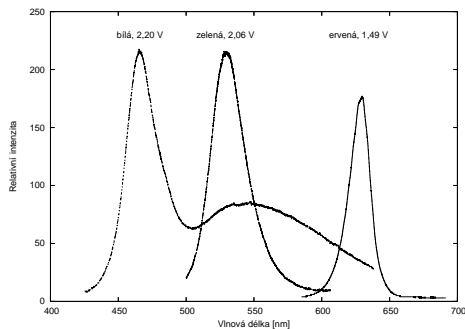
Experiment byl proveden večer za dostatečné tmy a při teplotě 22 °C. Byly měřeny červená, zelená a bílá LED dioda přesně podle uvedeného postupu. Jako voltmetr byl použit digitální multimetr s chybou měření 0,01 V. Naměřené hodnoty napětí U pro všechny diody včetně výsledků statistického zpracování shrnuje následující tabulka.

Naměřené hodnoty napětí a statistické zpracování.

Dioda	U_1 [V]	U_2 [V]	U_3 [V]	U_4 [V]	U_5 [V]	U [V]	$\sigma(U)$ [V]
červená	1,51	1,49	1,46	1,49	1,48	1,486	0,018
zelená	2,07	2,06	2,06	2,05	2,05	2,058	0,008
bílá	2,21	2,19	2,19	2,21	2,18	2,196	0,013



Obr. 2. Spektrum zelené diody při různých napětích.



Obr. 3. Spektrum všech diod (bílé, zelené a červené).

Emisní spektrum diod bylo studováno na monochromátoru SPM 2 (Carl Zeiss Jena), jehož využití nám laskavě umožnilo optické praktikum MFF UK – děkujeme. Monochromátor byl

kalibrovan na spektru rtuťové výbojky. Pořízená spektra nalezneme v grafech na obr. 2 a 3. U červené a zelené diody byl navíc zkoumán vliv napětí na diodě (tzn. svítivost diody) na její spektrální charakteristiku. Z grafu vidíme, že nastavené napětí, resp. svítivý výkon má zanedbatelný vliv na průběh spektra. Graf na obr. 3 uvádí vybrané spektrální charakteristiky všech diod.

Vyhodnocení měření komplikuje okolnost, že spektrum diod není zdaleka monochromatické. Jakou vlnovou délku tedy vidíme v okamžiku nastavení a odečtení napětí U ? Ze spektra určíme jednak vlnovou délku λ maxima charakteristiky, jednak krajní vlnovou délku λ_0 červeného konce spektra (kde fotony mají nejmenší energii), kterou můžeme okem spatřit. Odečtené hodnoty s odhadem chyby měření (raději nadsazené) uvádějí následující tabulky. Ze zaokrouh-

Experimentální hodnoty min. napětí a vlnové délky maxima spektrální charakteristiky.

Dioda	U [V]	ΔU [V]	λ [nm]	$\Delta \lambda$ [nm]	h [10^{-34} J·s]	Δh [10^{-34} J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	630	10	5,01	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	530	17	5,83	0,24	4,2
bílá	2,20	0,02	465	20	5,46	0,28	5,2

Experimentální hodnoty min. napětí a krajní vlnové délky charakteristik.

Dioda	U [V]	ΔU [V]	λ_0 [nm]	$\Delta \lambda_0$ [nm]	h [10^{-34} J·s]	Δh [10^{-34} J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	660	10	5,25	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	590	20	6,49	0,28	4,4
bílá	2,20	0,02	530	30	6,23	0,41	6,6

lené hodnoty minimálního napětí mohla být vypočtena experimentální hodnota h Planckovy konstanty s příslušnou chybou (zde lze dobře využít zákon o sčítání malých relativních chyb). Viz též diskuse.

K posouzení správnosti experimentu můžeme zobrazit experimentální hodnoty λ , λ_0 v závislosti na U . Podle (2)

$$\lambda, \lambda_0 = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} = \frac{A}{U},$$

kde koeficient A můžeme stanovit fitováním a z něho vyhodnotit Planckovu konstantu

$$h = \frac{e}{c} \cdot A. \quad (3)$$

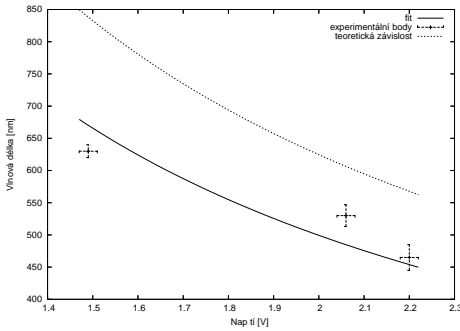
Zpracování je uvedeno v grafech na obr. 4 a 5. Pro srovnání je doplněn teoretický průběh závislosti pro dnešní tabelovanou hodnotu Planckovy konstanty.

Fitování provedené programem gnuplot 4.0 dává pro zpracování v grafu na obr. 4 výsledek $A = (1000 \pm 50) \text{ nm} \cdot \text{V}$, odkud podle (3) vychází

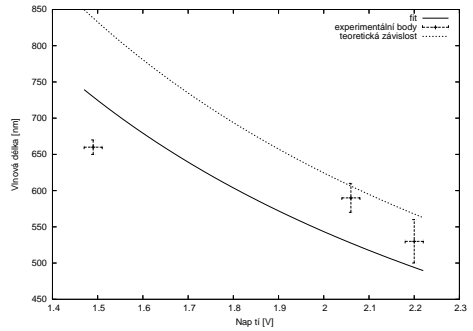
$$h = (5,333 \pm 0,246) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad \text{zaokrouhleno} \quad h = (5,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Pro hodnoty v grafu na obr. 5 výsledky jsou $A = (1090 \pm 80) \text{ nm} \cdot \text{V}$ a

$$h = (5,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$



Obr. 4. Fitování exp. bodů při odečtu v maximech spektrálních charakteristik.



Obr. 5. Fitování exp. bodů při odečtu v krajích spektrálních charakteristik.

Diskuse

Grafické zpracování výsledků v grafech na obr. 4 a 5 vypovídá mnoho o spolehlivosti našeho měření: *Změřené body nevykazují dobře očekávanou teoretickou závislost, proto zvolenou metodu můžeme doporučit nanejvýš pouze jako orientační měření!* Jen v jediném změřeném bodě (zelená LED dioda) jsme se v rámci chyby měření přiblížili skutečné hodnotě Planckovy konstanty. Rozumným závěrem z našeho měření může být např. aritmetický průměr $5,7 \cdot 10^{-34}$ J·s všech hodnot (z obou metod odečtu vlnové délky) a raději nadsazená chyba měření (kterou si nemůžeme dovolit zaokrouhlit na více než jednu platnou číslici – větší přesnost nemůžeme garantovat!). Minimální absolutní chyba má hodnotu $0,8 \cdot 10^{-34}$ J·s, aby zahrnovala všechny změřené hodnoty, lépe však $1 \cdot 10^{-34}$ J·s s ohledem na chyby měření jednotlivých výsledků. Podle chyby zaokrouhlíme výsledek.

Za dostatečně přesné můžeme považovat měření minimálního napětí pro emisi světla diodou, jehož relativní chyba se pohybuje okolo 1%. Jednoznačně největším problémem je určení vlnové délky světla, kterou v okamžiku odečtu napětí pozorujeme a která je pro malou intenzitu těžko měřitelná. Její hodnotu jsme odhadli při vyšší intenzitě vyzařování a za částečně ověřeného předpokladu, že průběh spektra diody není příliš ovlivněn vyzařovacím výkonem. Přesto nelze rozhodnout o tom, zda pozorujeme vlnovou délku v maximu charakteristiky či krajní vlnovou délku u červeného konce spektra. Zejména z tohoto důvodu bylo nadsazení chyby měření důležité. Tabelovaná hodnota Planckovy konstanty je přibližně $6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Všechny výsledky vyhovují teorii, tzn. nerovnosti (2). Odchylku od teoretické hodnoty můžeme zdůvodnit jednak nepřesností v určení vlnové délky emitovaného světla, jednak složitostí teoretického popisu reálných LED diod, zejména můžeme zpochybnit rovnost v (1), kterou jsme předpokládali pro vyhodnocení. Jiné metody k měření Planckovy konstanty mohou využívat dobře známý fotoefekt či Heisenbergovy relace neurčitosti (speciální optické experimenty s difrakcí na štěrbině).

Závěr

Podařilo se experimentálně odhadnout hodnotu Planckovy konstanty (obecněji její minimální hodnotu) $h = (6 \pm 1) \cdot 10^{-34}$ J·s. Přínos této úlohy spočívá především v pochopení činnosti LED diody (např. ve spektru bílé diody si všimneme excitačního píku a potom luminiscenčního píku, který samozřejmě nesmíme uplatnit k vyhodnocení) a zejména využití grafického zpracování k ověření *spolehlivosti* měření, resp. použitého teoretického popisu!

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů si vybrala stejnou metodu měření, kterou vesměs úspěšně realizovala, a došla k podobně vychýleným výsledkům. Ti, kdo užili vlnovou délku deklarovanou výrobcem, se lépe přiblížili tabelované hodnotě, což lze zdůvodnit tak, že údaj je počítán právě z tabelované hodnoty Planckovy konstanty. Bohužel však málo z vás se do hloubky zamyslelo nad příčinami jistého nesouhlasu, někteří opět pozapomněli na standardní zpracování měření a uvedení chyb výsledků a jejich správné zaokrouhlení, tzn. *garanci přesnosti měření*.

Pavel Brom

`paja@fykos.mff.cuni.cz`