20. ročník, úloha III . 3 ... *vzdálenost vizuální dvojhvězdy* *(4 body; průměr 3,15; řešilo 27 studentů)*

Z redukovaných hvězdných spekter složek dvojhvězdy (podle přítomných spektrálních čar, z nichž žádná v tomto případě nemění svou polohu v čase) jsme určili spektrální třídy obou hvězd a následně odhadli jejich hmotnosti na 2 a 3 hmotnosti Slunce. Z pozorování dalekohledem s ohniskovou vzdáleností 3 m víme, že složky skutečně obíhají v neměnné vzdálenosti 5 úhlových minut od sebe jednou za 50 let.

Dokážete z těchto informací určit vzdálenost dvojhvězdy od Slunce? Pokud ano, uveďte, jak jste jednotlivé informace použili, anebo nepoužili, a výsledek vhodně zaokrouhlete. Také okomentujte, jaký vliv na něj má nepřesná znalost údajů, zejména hmotností.

Při astronomickém pozorování vymyslel Pavel Brom.

Hvězdy o hmotnostech M_1 a M_2 na sebe gravitačně působí. Víme, že spektrální čáry v čase nemění svoji polohu. Z toho můžeme odhalit, že se hvězdy pohybují v rovině kolmé na spojnici Země a těžiště soustavy dvojhvězdy. Je vhodné zdůraznit, že tato situace je velmi vzácná. Úhel, pod kterým je pozorujeme, se nemění, hvězdy se tedy budou pohybovat po kružnicích se středem v těžišti. Pro poloměry těchto kružnic platí $M_1 r_1 = M_2 r_2$. Z třetího Keplerova zákona v přesném znění vypočteme vzdálenost R mezi hvězdami. Vzdálenost dvojhvězdy od Slunce potom určíme pomocí goniometrických funkcí v trojúhelníku.

Postupujme podrobně a odvoďme třetí Keplerův zákon. Na každou hvězdu působí gravitační síla a odstředivá síla. Obě síly musí být v rovnováze

$$\frac{\varkappa M_1 M_2}{(r_1+r_2)^2} = M_1 \omega^2 r_1 \,, \qquad \frac{\varkappa M_1 M_2}{(r_1+r_2)^2} = M_2 \omega^2 r_2 \,,$$

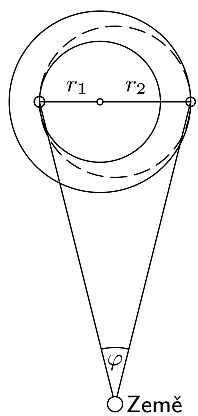
kde $\omega = 2\pi/T$ a $T = 50\,\mathrm{let}$. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$r_1^3 = \frac{\varkappa M_2}{\omega^2 \left(1 + M_1/M_2\right)^2} \,, \qquad r_2^3 = \frac{\varkappa M_1}{\omega^2 \left(1 + M_2/M_1\right)^2} \,.$$

Dostáváme vzdálenost hvězd od sebe

$$R = r_1 + r_2 = \left(\frac{\varkappa \left(M_1 + M_2\right) T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \,,$$

což je třetí Keplerův zákon v přesném znění.



Obr. 1. Pozorování dvojhvězdy ze Země.

Označíme-li φ úhel, který svírají složky dvojhvězdy při pozorování, platí pro vzdálenost x dvojhvězdy od Slunce

$$x = \frac{R/2}{\mathrm{tg}\,(\varphi/2)} \approx \frac{R}{\mathrm{tg}\,\varphi} \approx \frac{R}{\varphi} \,,$$

kde malý úhel φ je v radiánech. Po číselném dosazení vychází $x = 2{,}4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km} = 16\,000\,\mathrm{AU}$, což je šestnáctina vzdálenosti nejbližší hvězdy od Slunce. V našem zadání se vyskytla menší chyba. Úhlová vzdálenost měla být zadána jako 5 vteřin, nikoliv 5 minut. Po dosazení $\varphi = 5''$ vyjde vzdálenost od Slunce $x = 1{,}4 \cdot 10^{14}\,\mathrm{km} = 15\,\mathrm{ly}$.

V řešení jsme nepotřebovali údaj o ohniskové vzdálenosti dalekohledu. Z informace o spektrálních čarách jsme zjistili postavení dvojhvězdy vzhledem k Zemi. Z hmotností složek a periody oběhu jsme určili vzdálenost složek dvojhvězdy od sebe. Konečně vzdálenost dvojhvězdy od Slunce jsme stanovili ze znalosti o úhlové vzdálenosti jejích složek.

Hmotnost systému vystupuje ve vztahu pod třetí odmocninou. Tedy relativní chyba určení hmotnosti se na celkový výsledek přenáší z jedné třetiny. Ostatní veličiny (úhel a čas) jsme schopni měřit velmi přesně, takže se v celkové chybě také výrazně neprojeví.

Většina došlých řešení byla správná. Někteří řešitelé opomenuli diskutovat vliv chyby určení hmotností a téměř nikdo neuvedl, jak jednotlivé zadané informace použil/nepoužil při řešení úlohy.

Zdeněk Kučka
`zdenek@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.