20. ročník, úloha II . 4 . . . *jak je daleko Slunce?* *(4 body; průměr 2,88; řešilo 16 studentů)*

[. . .]

Na vás je, abyste tak jako Edmond Halley vymysleli, jak lze z měření přechodu Venuše určit vzdálenost Země od Slunce. Samozřejmě neznáte jiná než tehdejší data: poloměr Země a dobu oběhu Země a Venuše kolem Slunce z astronomických pozorování.

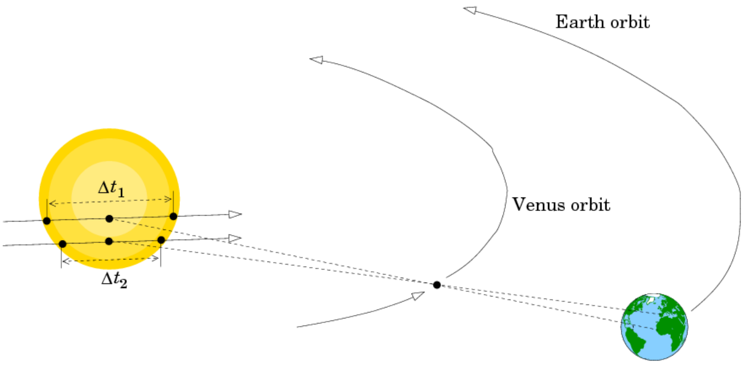
Úloha napadla Honzu Pracharře při čtení knížky Stručná historie téměř všeho.

Měřením vzdálenosti Země od Slunce se lidé zabývali již ve starověku, nicméně ne s velkým úspěchem. Venuše si lidé všimli dávno, některé národy z ní udělaly božstvo, ale později prohlédly, až nakonec Edmond Halley zveřejnil svůj slavný článek *Nová metoda určení sluneční paralaxy aneb vzdálenosti Země od Slunce* (jeho anglický překlad najdete např. zde[1]). Před jeho vydáním se o změření astronomické jednotky pokoušeli např. Jan Kepler nebo Tycho Brahe, ale nepřesně. Jak Halley píše, k využití přechodu Venuše jej inspiroval podobný úkaz – přechod Merkuru – který pozoroval na observatoři na ostrově sv. Heleny. Ověření své teorie se ale nedočkal, protože kvůli mírně nakloněné rovině oběhu Venuše okolo Slunce nastávají přechody vždy v párech po asi 120 letech. My jsme přechod mohli vidět v červnu roku 2004, nejbližší další bude za 6 let a ten následující až v roce 2117.

Vzhledem k tomu, že všechny úhly jsou velmi malé a vzdálenosti očekáváme velmi velké, využijeme aproximace $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \varphi$ a také, že poměr naměřených úhlových veličin je shodný s poměrem skutečných délkových veličin.

Pokud jsou oba pozorovatelé na stejném poledníku vzdáleni o h (h by mělo být kolmé na spojnici Země–Slunce), tvoří pak s Venuší trojúhelník podobný s trojúhelníkem vzniklým spojením dvou průmětů Venuše na Slunce a Venuší samotnou (viz obrázek 1). Zanedbáme-li to, že Venuše nemusí ležet přímo na spojnici středů Slunce a Země, můžeme určit koeficient podobnosti k z třetího Keplerova zákona

$$\frac{R_\mathrm{Z}^3}{R_\mathrm{V}^3} = \frac{T_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{V}^2} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{T_\mathrm{Z}^2}{T_\mathrm{V}^2}\right)^{1/3} - 1\,.$$



Obr. 1. Pozorování přechodu Venuše přes Slunce ze Země.

1) `http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/HalleyParallax.html`

Pokud tedy známe vzdálenost h, dokážeme vypočítat i vzdálenost dvou průmětů Venuše na Slunce, kterou označíme d. Z naměřeného poměru ε mezi úhlovou velikostí Slunce φ_S a úhlovou vzdáleností stop Venuše φ_d potom spočítáme skutečnou velikost Slunce.

$$2r_\mathrm{S} = d \cdot \varepsilon = \frac{h}{k} \cdot \varepsilon\,.$$

Pokud měříme vzdálenost Slunce od Země pomocí paralaxy, použijeme vztahu

$$R_\mathrm{Z} = \frac{r_\mathrm{S}}{\mathrm{tg}\,(\varphi_\mathrm{S}/2)} \approx \frac{2r_\mathrm{S}}{\varphi_\mathrm{S}}\,,$$

dosadíme za poloměr Slunce a máme výsledný vztah

$$R_\mathrm{Z} = \frac{h\varepsilon}{k\varphi_\mathrm{S}}\,.$$

Zbývá už jen z měření přechodu Venuše vyhodnotit poměr ε.

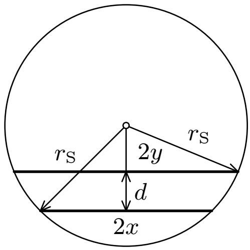
Jednodušší metoda využívá porovnání dvou zakreslených drah. Oba pozorovatelé se dohodnou na tom, že si zvolí referenční sluneční disk o poloměru r_ref. Během pozorování na něj zaznamenají postupně celou trajektorii přecházející Venuše. Potom se sejdou a zjistí, že jsou jejich výsledky posunuté o d_ref. Hledaný poměr tedy bude $\varepsilon = 2r_\mathrm{ref}/d_\mathrm{ref}$.

Druhou metodou je měření doby přechodu Venuše přes sluneční disk, což navrhoval i Edmond Halley. Využijeme toho, že pro malé paralaxy blízko spojnice Slunce a Země, konkrétně pro paralaxy φ_S a φ_d platí

$$\frac{\varphi_\mathrm{S}}{\varphi_d} = \frac{2r_\mathrm{S}}{d}\,.$$

Velikost d dokážeme určit z bližšího pohledu na situaci. Obě trajektorie vytínají na slunečním disku úsečky, které jsou rovnoběžné a posunuté o d (viz obr. 2). Z Pythagorovy věty určíme d

$$d = \sqrt{r_\mathrm{S}^2 - x^2} - \sqrt{r_\mathrm{S}^2 - y^2}\,,$$



Obr. 2. K výpočtu vzdálenosti d.

kde $2x$ je délka kratší a $2y$ délka delší úsečky. Jaký je poměr mezi d a r_S?

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d}{2r_\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r_\mathrm{S}}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_\mathrm{S}}\right)^2}\,.$$

Zaměřme se nyní na poměry x/r_S, resp. y/r_S. Můžeme je nahradit za $\varphi_x/\varphi_\mathrm{S}$, resp. $\varphi_y/\varphi_\mathrm{S}$. Uvažme, že oba pozorovatelé vidí Venuši obíhat kolem *Země* úhlovou rychlostí ω. Její okamžitou hodnotu vypočítáme jako součet úhlové rychlosti zdánlivého oběhu Slunce (ω_S) a úhlové rychlosti oběhu Venuše (ω_V).

$$\omega = \omega_\mathrm{S} + \omega_\mathrm{V} = \frac{v_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} + \frac{v_\mathrm{V} - v_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} - R_\mathrm{V}}\,.$$

Upravením dostaneme ($\eta^{-1} = 1 - (T_\mathrm{V}^2/T_\mathrm{Z}^2)^{1/3}$)

$$\omega = 2\pi \cdot (\eta - 1)\left(\frac{1}{T_\mathrm{V}} - \frac{1}{T_\mathrm{Z}}\right)\,.$$

Pak tedy dosazením všech vztahů vyjde hledané ε

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_1}{\varphi_S}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_2}{\varphi_S}\right)^2}\,.$$

Časy Δt_1, Δt_2 jsou naměřené údaje navržené Edmondem Halleyem (viz obr. 1).

Měření vzdálenosti mezi pozorovateli na jednom poledníku je docela jednoduché, pokud neuvažujeme sklopení zemské osy. Potom musíme přejít ke korekcím, které nám umožní získat přesnou hodnotu. Více o nich najdete například zde[2].

Popsaným způsobem však nelze naměřit hodnotu astronomické jednotky přesně. Pokud odstraníme všechny problémy spojené s měřením vzdálenosti pozorovatelů, zůstává ještě jeden – tzv. *black drop effect*. Přibližuje-li se Venuše okraji slunečního disku, ve chvíli těsně před dotykem se její okraj a okraj Slunce slijí to útvaru, který připomíná černou kapku. Původně to bylo bráno jako důsledek chování Venušiny atmosféry (a také jako důkaz její přítomnosti), nicméně dnes víme, že za tento jev můžou turbulence v atmosféře Země. Proto také z měření v roce 1761 vyplynula hodnota $153 \cdot 10^6$ km. Více k efektu najdete například na Wikipedii[3].

Ve vašich řešeních jste většinou využívali srovnávací metodu, době přechodu jste se radši vyhýbali, stejně jako přesnějšímu odhadu vzdálenosti mezi pozorovateli. Bohužel jsem se také nedočkal číselných výsledků – ale sám jej také neuvedu, protože jediný masově pozorovaný přechod se uskutečnil 8. 6. 2004 a nejsou z něj vhodné údaje. Většina pozorování se uskutečnila v Evropě, nejsou tedy dvě dostatečně vzdálená místa (pro metodu využívající doby přechodu) a rekonstruovat záznamy trajektorií je časově náročné. Nicméně pokud by to někoho z vás zajímalo, může navštívit stránky NASA[4] a dostat se až k naměřeným údajům pro evropská města. Pokud byste se chtěli dozvědět o přesném postupu podle Edmonda Halleye, doporučuji přímo jeho článek nebo práci F. Mignarda[5], kde jsou rozvedeny všechny podrobnosti.

Aleš Podolník
`ales@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

2) `http://eclipse.astroinfo.org/transit/venus/project2004/pub/Blatter.etal.eng.200306.pdf`

3) `http://en.wikipedia.org/wiki/Black_drop_effect`

4) `http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/`

5) `http://www.astro.uni.wroc.pl/vt-2004/inne_strony_www/Mignard_eng.pdf`