20. ročník, úloha II . 3 ... *osvětlení stolu* *(4 body; průměr 2,21; řešilo 19 studentů)*

Navrhněte rozmístění zářivek na stropě pracovny, který je ve výšce 3 m nad deskou stolu tak, aby intenzita osvětlení na ploše stolu nekolísala víc než o 0,1 %.

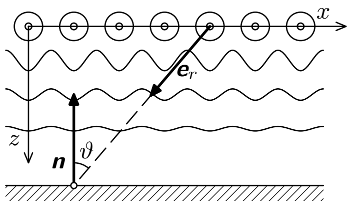
Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

Nejprve je třeba uvést, jak zadaná situace vypadá. Zadání úlohy si zjednodušíme tak, že budeme předpokládat strop jako nekonečně velkou rovinu rovnoměrně posetou nekonečně dlouhými zářivými trubicemi zanedbatelného průměru, navzájem rovnoběžnými, přičemž každé dvě sousední jsou ve vzdálenosti b od sebe.

Budeme-li značit I svítivost jednotlivého (bodového) zdroje, pak pro osvětlení plochy můžeme psát

$$E_n = \frac{I}{r^2}(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}) ,$$

kde $\boldsymbol{e}_r$ je jednotkový vektor směřující od zdroje a $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor orientované plochy. Jejich skalární součin nám tedy zajistí faktor $\cos\vartheta$, kde ϑ je úhel dopadu.



Obr. 1. Ekvipotenciály elektrického pole nabitých přímých vodičů.

Nyní přijde na řadu hlavní *trik* celého řešení. Osvětlení E_n odpovídá normálové složce intenzity elektrického pole vytvořeného bodovým nábojem velikosti $4\pi\varepsilon_0 I$. Toho využijeme a převedeme náš problém na elektrostatickou úlohu. Místo zářivek si představíme nekonečně mnoho přímých nabitých vodičů a budeme počítat intenzitu elektrického pole této sítě.

Budeme-li zkoumat vzniklé elektrické pole v dostatečné vzdálenosti, poznáme, že je velmi dobře homogenní. S přibližováním se k mřížce se však bude tato vlastnost postupně vytrácet. Ekvipotenciální plochy budou již poněkud zvlněné a to je věc, která nás pro tuto chvíli bude zajímat. Budeme zkoumat amplitudu těchto sinusových vln.

Zavedeme souřadnicový systém, a to tak, že osa y bude rovnoběžná s vodiči ležícími v rovině xy a osa z bude na tuto rovinu kolmá. Využijeme znalosti obecného tvaru rovnice pro kmitání a zkusíme ji upravit do následující formule pro elektrostatický potenciál

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{b} , \tag{1}$$

kde n je řád harmonické funkce a $F_n(z)$ je amplituda n-té harmonické složky potenciálu ve vzdálenosti z. Díky tomu, že jsme předpokládali nekonečně dlouhé dráty, neměla by se závislost na y projevit vůbec. Nultý člen sumy ($n = 0$) z našich úvah dále vypustíme, neboť se jedná o konstantní hodnotu (ta vlastně určuje intenzitu osvětlení), kdežto nás zajímají oscilace.

Má-li jít o platný potenciál, musí v oblasti pod dráty (kde nejsou žádné náboje) vyhovovat Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 .$$

Když do této rovnice dosadíme výraz (1), dostaneme pro každý sčítanec

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{b} + \frac{\mathrm{d}^2 F_n}{\mathrm{d}z^2} \cos \frac{2\pi n x}{b} = 0 , \tag{2}$$

tedy $F_n(z)$ musí splňovat rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 F_n}{\mathrm{d}z^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n \,.$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$F_n = A_n \mathrm{e}^{-z/z_0}\,, \tag{3}$$

kde $z_0 = b/2\pi n$.

Nyní již víme, že existuje nenulová amplituda pole s n-tou harmonickou a s rostoucí vzdáleností od stropu se bude amplituda každé harmonické zmenšovat exponenciálně. V naší aproximaci bude nadále postačovat pracovat pouze s první harmonickou ($n = 1$), neboť pro $n = 1$ je ten pokles jistě nejmenší. Případné zpřesnění výpočtu můžeme přenechat čtenáři jako cvičení; vždyť se jedná o pouhý součet příslušných členů.

Vztah (3) je klíčový pro řešení naší úlohy. Jestliže intenzita osvětlení nesmí kolísat o více než 0,1 %, znamená to, že hledáme takové b mezní, že výraz

$$\mathrm{e}^{-2\pi n z/b} \leq 1/1000$$

ještě platí.

Prostým zlogaritmováním získáme výsledek

$$b \leq \frac{2\pi n z}{\log 1000}\,.$$

Číselně vycházejí pro $z = 3\,\mathrm{m}$ maximální rozestupy mezi zářivkami 2,7 m.

Zvolíme-li například tuto vzdálenost rovnu třem čtvrtinám výšky nad stolem, bude exponenciální součinitel 1/4000. A tedy pro přesnost osvětlení na tisícinu dostáváme koeficient bezpečnosti 4. Je až překvapující, jak velké rozestupy stačí k tak rovnoměrnému osvětlení.

Během opravování doručených řešení mě zejména zarazil fakt, že mnozí z vás neporozuměli slovu *zářivka* a místo toho, aby počítali s dlouhou svítící tyčí, operovali ve svých řešeních se svítícími body – žárovkami. Pokud jde o způsob řešení, tak bez výjimky všichni se snažili počítat poměr mezi intenzitou osvětlení v místě mezi dvěma sousedními zářivkami a přímo pod jednou ze zářivek. Tento přístup je pochopitelně také správný, ale protože většinu z vás napadl, zvolil jsem pro ukázku postup s využitím triku o elektrickém poli.

Tomáš Jirotka
`byrot@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.