20. ročník, úloha I . E ... *sbírání šišek* *(8 bodů; průměr 5,00; řešilo 21 studentů)*

Počet spirál tvořených šupinami šišek vycházejících od špičky není libovolný, nýbrž nabývá hodnot 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... To jsou členy tzv. Fibonacciho posloupnosti, v níž další člen získáme sečtením předchozích dvou, přičemž první dva členy posloupnosti jsou 1 a 1. Jako každé pravidlo má však i toto své výjimky. Někdy se totiž stane, že počet spirál je roven 1, 3, 4, 7, 11, ..., tedy prvku Lucasovy posloupnosti. Získáme ji stejným postupem jako Fibonacciho, začínáme ale s 1 a 3.

Vaším úkolem je zjistit, jak často a za jakých podmínek se tato anomálie vyskytuje na Zemi. Prozkoumejte závislost na co nejvíce různých parametrech (např. roste-li strom v lese či volně). *Těmito a jinými čísly v přírodě se zabývá Lenka Zdeborová.*

Úvodem našeho řešení uznejme, že se tentokrát nejednalo o klasickou experimentální úlohu, neboť vyžadovala jiné metody řešení, než jsme obvykle byli zvyklí. V tomto textu se nejprve pokusíme vysvětlit cosi o tajemství jevu zvaného *phyllotaxe*, povíme si, jak vše souvisí s Fibonacciho, resp. Lucasovými čísly, a závěrem provedeme zpracování „naměřených“ hodnot.

Teorie

V zadání úlohy jsme vás odkazovali na studijní text `http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~zdebl9am/phyllot.pdf`, ve kterém se můžeme dočíst zdůvodnění, proč se šupinky šišek skládají do spirál, jejichž počet v obou směrech otáčení je vždy roven dvěma po sobě jdoucím číslům z Fibonacciho posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Toto zdůvodnění považujme tedy za vyložené a nebudeme jej zde dále rozebírat.

Avšak tak tomu není pokaždé. Oním důvodem je fakt, že zmíněné uspořádání souvisí se *zlatým řezem*[1] (připomeňme jeho hodnotu $\Theta = (1+\sqrt{5})/2$), ke kterému konverguje poměr F_{n+1}/F_n. Jenže Fibonacciho posloupnost není jediná, jež má tuto vlastnost. Chovají se tak všechny posloupnosti přirozených čísel dané rekurentním vzorcem $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ bez ohledu na hodnoty prvních dvou členů. Důkaz je prostý.

Předpokládejme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L\,,$$

a dokažme nyní, že $L = \Theta$. Nejprve si rekurentní zadání posloupnosti upravme do tvaru $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ a vydělme jej členem a_n. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\,,$$

kde za oba zlomky můžeme v limitě $n \to \infty$ podle předpokladu dosadit L, resp. $1/L$. Rovnice se nám tak zjednoduší do krásného tvaru

$$L = 1 + \frac{1}{L}\,,$$

který až nápadně připomíná rovnici, která vede na zlatý řez. A skutečně! Řešením jsou čísla $L_1 = (1+\sqrt{5})/2$ a $L_2 = (1-\sqrt{5})/2$, jenže druhý kořen nemá smysl, vždyť všechna čísla

[1] Některé zdroje uvádějí též souvislost ze *zlatým úhlem* $\varphi = 360° \cdot (2 - \Theta) \approx 137{,}5°$, k němuž v nekonečnu konverguje poměr $360° \cdot F_n/F_{n+2}$. Pod tímto úhlem se nacházejí osy dvou po sobě vyrostlých šupinek či lístků. Ale v tomto textu se zlatým úhlem zabývat nadále nebudeme, pouze jej uvádíme jako zajímavost.

v posloupnosti jsou kladná a $L_2 < 0$. Vidíme tedy, že výše uvedený rekurentní vztah vede vždy ke zlatému řezu.[2]

Naskýtá se tedy otázka, proč šišky, ale i jiné přírodní výtvory (květenství, listy na stonku, ...), preferují právě Fibonacciho posloupnost. Odpověď na tuto otázku není známa. Jako by počáteční prvky posloupnosti měly být co nejnižší (v případě Fibonacciho 1, 1; pokud jde o Lucasovu posloupnost 1, 3) a vyšší čísla nebyla pro rostlinky dostatečně přitažlivá, přestože některé takové řady konvergují ke zlatému řezu rychleji. O vysvětlení nejasnosti se máme pokusit počítáním spirál tvořených šupinami šišek. Celosvětová statistika uvádí výskyt v průměru 2–5 % případů čísel z Lucasovy posloupnosti. Abychom i my mohli zpracovávat data nějak rozumně, zkompletujeme veškerá dostupná doručená měření. Tím dostaneme poměrně rozsáhlý statistický soubor dat, ve kterém (možná) objevíme nějakou závislost.

Postup a výsledky měření

Nyní ve stručnosti ještě rozeberme metodu měření. Každá šiška má dva typy spirál – pravotočivé a levotočivé. Jejich počty jsou vždy dva po sobě jdoucí členy výše zmíněných posloupností. Díky tomu jsme schopni rozhodnout i sporný počet 3. Nejvhodnější je počítat spirály po obvodu ve zvolené úrovni tak, že si vždy jednu spirálu zvolíme za výchozí a nějak ji označíme.

Budeme zkoumat dva parametry – druh a osamělost (sám či v lese) stromu. Tímto omezením se pokusíme získat ještě větší množství dat, než kdybychom zkoumali každou lokalitu zvlášť.

Tabulka uvádí počty šišek, jejichž počty spirál odpovídají Fibonacciho, resp. Lucasově posloupnosti, v závislosti na druhu a umístění stromu.

Druh	Umístění	Lucas	Fibonacci	Relativní počet šišek Lucas [%]
Smrk	v lese	27	619	4,2
Smrk	osamocen	5	179	2,8
Borovice	v lese	61	766	7,4
Borovice	osamocena	24	136	15,0
Modřín	v lese	39	170	18,7
Modřín	osamocen	32	109	22,3
Celkem		188	1979	8,8

Přestože jsme měli k dispozici data z různých koutů světa (Česko, Slovensko, Francie, Švýcarsko, USA), výskyt anomálních šišek byl všude přibližně stejný. S naším výsledkem 8,8 % jsme se sice dostali lehce nad obecně uznávaný světový průměr, ale vzhledem k malému množství šišek jde spíše o náhodu.

Zdá se tedy, že výskyt abnormálních šišek je veskrze náhodný jev, nedá se přesně určit nějaká závislost např. na zeměpisné poloze, nadmořské výšce či druhu stromu. Patrně našimi závěry revoluci v biologii nespácháme, i když je třeba zmínit i určité speciální poznatky:

- Výskyt lucasovských šišek se zdá vyšší u modřínu a borovice než u smrku. Otázkou je, zda-li nedošlo k chybnému zjištění počtu spirál vzhledem k tomu, že modřínové a borovicové šišky jsou častěji deformované a nepravidelné.
- Na jednom stromě mohou vyrůst šišky obou typů, neboť nebyl pozorován strom plný výhradně anomálních šišek.

[2] Obdobného triku využívá i důkaz konvergence $360° \cdot F_n/F_{n+2} \to \varphi$.

- Z předchozího pozorování vyplývá, že typ spirál nebude záviset na genetické výbavě daného stromu nebo jeho umístění v krajině.
- *Radimu Pechalovi* (Rožnov p. R.) a *Jakubu Michálkovi* (t.č. v USA) se podařilo najít smrkovou šišku s počtem spirál 6.

  Snadno zjistíme, že číslo šest patří do řady 1, 5, 6, 11, ... nebo 2, 2, 4, 6, ..., ale takových možností je více. Rozhodnout bychom mohli, pokud bychom znali počet spirál v opačném směru. Ale každopádně je to více než anomálie.

Poznámky k řešením

Nejčastější chybou řešitelů byla ignorance faktu, že šišky mají dva směry stáčení spirál a že počty spirál v obou směrech jsou dva po sobě jdoucí prvky posloupnosti; tedy je možné, že šišky s počtem 8 a 13 jsou vlastně totožné, neboť mají v jednom směru 8 a ve druhém 13 spirál.

Námět pro další práci/projekt

Pokud by se někdo chtěl tomuto problému věnovat hlouběji, je to dobrý nápad, vzhledem k tomu, že většina informací o phyllotaxi jsou domněnky. Doporučený postup by byl zvolit si nějaký lesík (cca 2 ha) a po několik let tam rok co rok sesbírat veškeré šišky a data takto průběžně zpracovávat.

Tomáš Jirotka
`byrot@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.