

19. ročník, úloha V. 4 ... přírodní reaktor (4 body; průměr 2,59; řešilo 22 studentů)

Ve vzorku přirozeného uranu je 0,72 % izotopu ^{235}U s poločasem rozpadu 704 miliónů let a zbytek izotopu ^{238}U , který má poločas rozpadu 4 468 miliónů let.

V sedmdesátých letech minulého století byla při těžbě uranu v oblasti Okla v rovníkovém Gabonu objevena ruda s relativním zastoupením izotopu ^{235}U 0,44 %. Tento nesoulad lze vysvětlit tím, že se v ložisku kdysi samovolně zažehl přírodní jaderný reaktor.

Určete, po jakou dobu jaderná reakce probíhala, bylo-li štěpení ^{235}U vyvoláno pomalými neutrony. Ke srážce nějakého pomalého neutronu s daným jádrem dojde průměrně jednou za 352 tisíc let.

Úloha ze zápočtové písemky z jaderné fyziky.

V případě rozpadu částic můžeme předpokládat, že částice jsou nezávislé a každá z nich se v malém časovém intervalu dt rozpadne s pravděpodobností λ . Za tento úsek času se tedy rozpadne $dN = -\lambda N dt$ částic (záporné znaménko bereme kvůli tomu, že částic ubývá). Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad \ln N = -\lambda t + \text{konst.},$$

Počet částic, které se zatím nerozpadly, je tedy vyjádřen funkcí

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

kde $N(0)$ je původní počet částic. Střední doba života jedné částice τ je rovna převrácené hodnotě koeficientu λ . Střední dobu totiž můžeme určit tak, že každý z časů t započteme s vahou počtu částic rozpadlých v úseku $(t, t + dt)$. Pro spojitou proměnnou přejde součet v následující integraci

$$-\frac{1}{N(0)} \int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N(0)\tau} \int_0^\infty t N(0) e^{-t/\tau} dt = \tau \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} d\frac{t}{\tau} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = \tau.$$

Čas τ je tedy průměrnou dobou, po které dojde k rozpadu částice. S poločasem rozpadu $T_{1/2}$ (dobou, ve které se rozpadne přesně polovina částic) souvisí střední doba života vztahem $\tau \ln 2 = T_{1/2}$, který obdržíme z rovnice (1) dosazením $N(T_{1/2}) = 1/2 N(0)$.

Nechť reakce probíhala po dobu t_1 a pak se izotop po dobu t_2 dál rozpadal. Protože radioaktivní rozpad i snižování obsahu izotopu ^{235}U v důsledku reakce jsou nezávislé jevy, dostáváme pro počet jeho atomů ve vzorku z Okla

$$N_{235}(t_1) = N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-t_1 \ln 2 / T_{235}}, \\ N_{235}(t_1 + t_2) = N_{235}(t_1) e^{-t_2 \ln 2 / T_{235}} = N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{235}},$$

kde τ je střední doba srážky neutronů s jádrem a T_{235} poločas rozpadu izotopu ^{235}U . Počet atomů ^{238}U vypočteme obdobně už bez příspěvku reakce

$$N_{238}(t_1 + t_2) = N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{238}}.$$

Pro vzorky z oblastí, kde jaderná reakce neproběhla, dostáváme

$$N'_{235}(t_1 + t_2) = N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{235}}, \\ N'_{238}(t_1 + t_2) = N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{238}}.$$

Poměr zastoupení izotopů ^{235}U a ^{238}U před reakcí byl v obou vzorcích stejný, proto

$$\begin{aligned} \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} &= \frac{N_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \\ &= \frac{N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} e^{-t_1/\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Odsud získáme dobu reakce

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{N_{238}(t_1 + t_2)}{N_{235}(t_1 + t_2)} \cdot \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} \right].$$

Požadované poměry už snadno získáme z relativního zastoupení η izotopu ^{235}U

$$\eta = \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2) + N_{235}(t_1 + t_2)} \Rightarrow \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} = \frac{\eta}{1 - \eta},$$

obdobně pro čárkované veličiny. Pro dobu reakce tedy konečně máme

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{\eta'(1 - \eta)}{\eta(1 - \eta')} \right],$$

číselně vychází asi 170 tisíc let. Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na poločasech rozpadu jednotlivých izotopů, ani na době, ve které reakce proběhla.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz