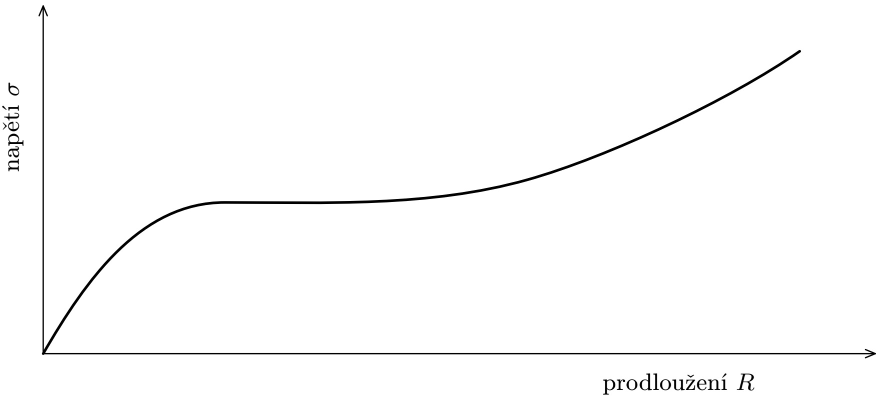
19. ročník, úloha IV . 4 ... *svatba Balónka a Balónky* *(3 body; průměr 1,49; řešilo 41 studentů)*

. . . a už zní svatební síní slavnostní pískot a fukot. Ano, je to tak, Pískal s Foukalkou si dnes řeknou své písk. A už je tu první novomanželský polibek, při němž se spojí svými otvory. Poté kněz slavnostně rozváže provázky a dojde k propojení. Popište, co bude následovat. Nezapomeňte, že všichni svobodní Balónci mají stejné parametry.

Úlohu navrhl Petr Sýkora.

Pokud se dva Balónci spojí otvory, v zásadě mohou nastat dvě různé situace. V případě, že oba byli vcelku málo nafouknuti, nastane případ obdobný chronicky známému experimentu spojených bublin, kdy se jedna bublina prakticky vyfoukne do druhé. Pokud byli oba Balónci nafouknuti více, tato analogie již neplatí a Balónci zůstanou zhruba ve stejném stavu, v jakém byli před spojením.

Pro pochopení fysikální podstaty rozdílu mezi těmito situacemi nám napomůže kvalitativní graf závislosti napětí gumy na jejím relativním prodloužení (viz obr. 1). Je vidět, že zde máme zhruba tři oblasti. V první (velmi krátké) oblasti nám napětí rychle roste s prodloužením, toto je ten největší odpor na počátku nafukování. Pak následuje oblast, kdy se napětí příliš nemění s prodloužením, a toto je právě oblast, kdy je situace obdobná bublinám, které mají prakticky konstantní povrchové napětí. A nakonec je tu oblast, kde napětí opět začne růst. Toto je oblast, kde se již prakticky nic neděje po spojení Balónků.

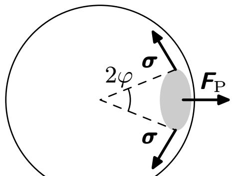


Obr. 1. Závislost napětí gumy na jejím prodloužení

V celém dalším textu budeme v našich spíše kvalitativních úvahách předpokádat kruhového Balónka o poloměru R s přetlakem P vzduchu uvnitř oproti okolnímu atmosférickému tlaku, kdy navíc přetlak bude malý oproti velikosti atmosférického tlaku. Tudíž hustota vzduchu uvnitř Balónka bude považována za konstantní. Tento předpoklad jde jednoduše ověřit například tak, že pokud k otvoru Balónka připevníme trubici, stačí její konec ponořit pod vodu do hloubky necelého půlmetru a Balónek již není schopen překonat hydrostatický tlak.

Nyní se podíváme na myšlený kroužek v povrchu Balónka o poloměru r a budeme studovat, jaké síly na něj působí. Jelikož nás zajímají především ustálené stavy, budeme předpokládat, že tento kroužek je v klidu, a tedy výslednice vnějších sil je nulová. Také zanedbáme vliv gravitace, jelikož hmotnost povrchu Balónka je malá. Zbyly nám tedy dvě působící síly – přetlak P vzduchu uvnitř Balónka a napětí σ jeho stěny, které působí na obvodu našeho myšleného kruhu, ve směru tečném k povrchu Balónka a zároveň kolmo ke kružnici ohraničující náš myšlený kruh.

Je zřejmé, že přetlak bude na náš myšlený kruh působit silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{P}$ směrem ven o velikosti $F_\mathrm{P} = \pi r^2 P$. Úhel mezi rovinou našeho myšleného kroužku a tečnou rovinou k povrchu Balónka na okraji kruhu označíme φ. Z geometrie Balónka je zřejmé, že $\sin\varphi = r/R$. Z povahy napětí stěny zase můžeme odvodit, že výslednice napětí po celém obvodu našeho kruhu míří dovnitř Balónka a má velikost



Obr. 2

$$F_\mathrm{N} = 2\pi r\sigma \sin\varphi = \frac{2\pi\sigma r^2}{R}\,.$$

Jelikož tyto síly mají opačný směr a jsou to jediné dvě uvažované síly, musí se v klidu jejich velikosti rovnat, tedy

$$\pi r^2 P = \frac{2\pi\sigma r^2}{R} \quad\Rightarrow\quad P = \frac{2\sigma}{R}\,. \tag{1}$$

Musíme si uvědomit, že σ pro Balónek nemusí být zdaleka konstantní, jako je tomu například u bubliny.

Nyní se vrátíme k našemu grafu závislosti σ na relativním prodloužení. Začneme oblastí, kde je σ prakticky konstantní, a situace je tedy analogická dvěma spojeným bublinám. Když se podíváme na (1) a budeme uvažovat konstantní σ, je zřejmé, že čím více bude Balónek nafouknutý, tím nižší tlak bude uvnitř. Tedy pokud na počátku máme stejně nafouknutého Balónka a Balónku a tlak v Balónkovi se nepatrně zvýší, vzduch začne proudit do Balónky a tím ji zvětšovat, čímž klesá tlak uvnitř ní. Zároveň se zmenšuje Balónek, čímž se zvyšuje tlak uvnitř něj. Máme tedy situaci, která skončí až ve chvíli, kdy se jeden z Balónků dostane mimo oblast, kdy σ nezávisí na prodloužení, což v praxi znamená, že jeden z Balonků se skoro vyfoukne a druhý se mírně nafoukne.

Pokud se budeme zabývat oblastí velkých prodloužení, můžeme vcelku úspěšně aproximovat závislost napětí na poloměru Balónka pomocí lineární závislosti, tedy $\sigma = \alpha R$, kde α je nějaký koeficient úměrnosti větší než nula. Pokud tento vztah dosadíme do (1), získáme vztah

$$P = 2\alpha\,.$$

Je tedy vidět, že tlak v Balónkovi (pro tuto oblast poloměrů) příliš nezávisí na poloměru Balónka. Pokud tedy máme na počátku stejně nafouknutého Balónka i Balónku a vlivem fluktuací se v jednom z nich nepatrně zvýší tlak, nic se neděje, jelikož ten se opět vyrovná, aniž by se výrazně měnil poloměr.

Petr Sýkora
petr@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.