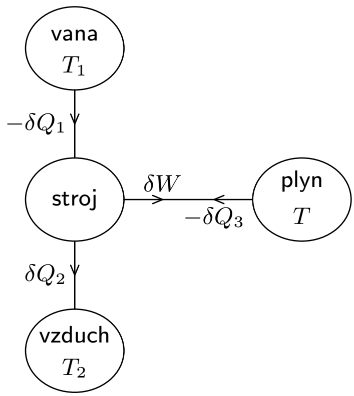
19. ročník, úloha III . 3 ... *odložená koupel* *(4 body; průměr 1,62; řešilo 29 studentů)*

Robin se rozhodl, že se po půl roce vykoupe. Napustil si vanu teplou vodou o teplotě T_1 a objemu V_1. Ke koupání ale zase nedošlo. Napadlo ho, že je to zbytečné plýtvání energií, teplo z vany totiž lze použít i lépe.

Robin je šikovný a umí si vyrobit libovolný tepelný stroj, proto si už dávno chtěl izotermicky stlačit plyn o teplotě T, objemu V_0 a hustotě ϱ. A tady k tomu dostal ideální příležitost. Jako chladič použil okolní vzduch, jehož množství je nevyčerpatelné a jehož teplota je T_2. Určete, na jaký minimální objem V_{min} lze tento plyn stlačit, použije-li k tomu Robin teplou vodu ve vaně a svůj tepelný stroj. *Matouš se nechal inspirovat na přednášce z termodynamiky.*

K lepšímu znázornění problému nám pomůže obrázek 1. Veličiny odpovídající vaně označme indexem 1, vzduchu indexem 2 a zahřívanému plynu indexem 3. Kladným znaménkem označujeme teplo, které dané těleso přijalo, záporným znaménkem teplo odevzdané. Obdobně je práce vykonaná na plynu kladná. Klíčové bylo uvědomit si, že můžeme využít teplo δQ_3 uvolněné při izotermickém stlačování plynu.



Obr. 1

Pokud je vnitřní energie plynu jenom funkcí teploty (což např. pro ideální plyn platí), nebude se při izotermickém ději měnit. Z prvního termodynamického zákona $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$ dostáváme pro element práce $\delta W = -\delta Q_3$. Soustava jako celek je uzavřená, její celková vnitřní energie se tedy nemění. Protože na vaně ani vzduchu se práce nekoná, budou přírůstky jejich vnitřní energie rovny přírůstkům tepel. Při použití výše uvedené znaménkové konvence dostáváme

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta Q_3 + \delta W = \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0\,.$$

Zaveďme veličinu zvanou entropie následujícím vztahem pro její malý přírůstek $\mathrm{d}S = \delta Q/T$.[1] Celková entropie izolované soustavy nikdy neklesá, což si můžeme ilustrovat na příkladu dvou těles o teplotách T_s a T_t ($T_\mathrm{s} < T_\mathrm{t}$). Vyjádříme si změnu celkové entropie za předpokladu, že si obě tělesa vyměňují teplo pouze mezi sebou (tj. $Q_\mathrm{s} = -Q_\mathrm{t}$)

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_\mathrm{s} + \mathrm{d}S_\mathrm{t} = \frac{\delta Q_\mathrm{s}}{T_\mathrm{s}} + \frac{\delta Q_\mathrm{t}}{T_\mathrm{t}} = \delta Q_\mathrm{s}\left(\frac{1}{T_\mathrm{s}} - \frac{1}{T_\mathrm{t}}\right) \geq 0\,.$$

Uvědomme si, že výraz v závorce je kladný a záporné δQ_s by odpovídalo předávání tepla ze studenějšího tělesa teplejšímu, což odporuje druhému termodynamickému zákonu.

Pro uvažovaný systém tedy dostáváme

$$\mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 + \mathrm{d}S_3 \geq 0\,,$$
$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_3}{T} \geq 0\,.$$

[1] Pro přírůstek entropie (obdobně jako u vnitřní energie) používáme symbolu totálního diferenciálu d, protože jde o stavovou veličinu (při pevném látkovém množství je pevně určena hodnotami U a V). Oproti tomu se práce a teplo vztahují k určité trajektorii ve stavovém prostoru, nejsou určeny jedním bodem stavového prostoru, totální diferenciál nemají.

Uvažujme, že tepelná kapacita C vody ve vaně je nezávislá na teplotě, potom $\delta Q_1 = -\delta Q_2 = C\,\mathrm{d}T_1$. Pro změnu entropie systému během celého děje, kde se vana ochladí z teploty T_1 na teplotu T_2, dostáváme

$$C\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} - \frac{C}{T_2}\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T_1 - \frac{W}{T} \geq 0\,.$$

Vidíme, že práce vykonaná na plynu bude maximální, pokud bude zachována rovnost (děj je tedy vratný, opačný děj by neporušoval podmínku neklesání celkové entropie). Maximální práce je tedy

$$W_{\max} = CT\left(\ln\frac{T_2}{T_1} - \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\right)\,. \tag{1}$$

Abychom určili minimální objem V, musíme znát závislost tlaku plynu na teplotě a objemu, tedy jeho stavovou rovnici. Pro zjednodušení uvažujme ideální plyn se stavovou rovnicí $pV = nRT$, kde n je látkové množství a R univerzální plynová konstanta. Při vyjádření práce si dáme pozor na to, že změna objemu je záporná, před integrálem bude tedy znaménko mínus.

$$W_{\max} = -\int_{V_0}^{V_{\min}} p\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_0}^{V_{\min}}\frac{1}{V}\,\mathrm{d}V = -nRT\ln\frac{V_{\min}}{V_0}\,. \tag{2}$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme

$$V_{\min} = V_0\exp\left[\frac{C}{nR}\left(1 - \frac{T_1}{T_2} - \ln\frac{T_2}{T_1}\right)\right]\,.$$

Ukažme si, že uvedené maximální práce lze skutečně dosáhnout. Vytvoříme Carnotův cyklus s vanou jako ohřívačem a vzduchem jako chladičem. Vana dodává teplo $-\delta Q_1$, tímto cyklem můžeme tedy získat práci $(-\delta Q_1)(1 - T_2/T_1)$. (Dokažte sami obdobnou úvahou jako na začátku řešení, že účinnost Carnotova cyklu je nejlepší možná.) Teplo $(-\delta Q_3)$, které se uvolní při stlačování plynu, můžeme využít v dalším Carnotově cyklu, probíhajícím mezi plynem a vzduchem. Pro element práce vykonané na plynu dostáváme

$$\delta W = (-\delta Q_1)\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + (-\delta Q_3)\left(1 - \frac{T_2}{T}\right)\,.$$

Pokud si uvědomíme, že $(-\delta Q_3) = \delta W$ a pro element tepla platí $\delta Q_1 = C\,\mathrm{d}T_1$, obdržíme rovnici

$$\delta W = -C\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\mathrm{d}T_1 + \delta W\left(1 - \frac{T_2}{T}\right)\,,$$

z níž snadno osamostatníme element práce

$$\delta W = -C\frac{T}{T_2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\mathrm{d}T_1\,.$$

Integrací opět dospějeme k výsledku (1).

Abychom mohli splnit podmínku izotermického stlačování, musí být $T \geq T_2$, v opačném případě by plyn nemohl odevzdávat teplo žádnému okolnímu objektu.

Většina z vás bohužel zapomněla na teplo, které se uvolní při stlačování plynu. Jediné správné (a vyčerpávající) řešení poslal *Marek Pechal*, čímž si zasloužil prémii.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.