19. ročník, úloha II . 1 ... *propiska na šňůrce* *(4 body; průměr 2,58; řešilo 59 studentů)*

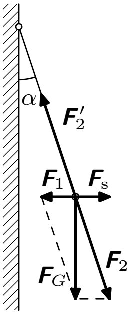
Ve stojící tramvaji visí u svislé desky na niti délky l propiska o hmotnosti m. Tramvaj se rozjede se zrychlením a, které můžeme považovat za konstantní. Vypočítejte, kam až toto kyvadlo vykývne (jaký maximální úhel bude nit svírat s deskou) a kdy tužka opět ťukne do desky. *Úloha z prvního ročníku FYKOSu.*

Na začátku se dohodněme, že propisku budeme považovat za hmotný bod, neboť její rozměry nemají na řešení problému vliv. (Představme si propisku přivázanou za těžiště). Dále budeme uvažovat malou výchylku, obdobně jako u matematického kyvadla. Tato výchylka bude nejvýše asi 5°, což odpovídá zrychlení cca $1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, na tramvaj až dost.

Úlohu budeme řešit v neinerciální vztažné soustavě – v soustavě spojené s tramvají. Nejprve musíme zjistit úhel φ, pro který bude propiska ve stabilní rovnovážné poloze. Tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_G$ si rozložíme na $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_1$ (viz obr. 1).

Aby propiska zůstala v rovnováze, musí být výsledná síla nulová. Síla $\boldsymbol{F}_2$ bude vyrušena reakcí lanka $\boldsymbol{F}_2'$, nemusíme se jí tedy dále zabývat. Zbývá síla $\boldsymbol{F}_1$, jejíž velikost se musí rovnat velikosti setrvačné síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$. Dostaneme tedy rovnost (pro malé φ platí $\mathrm{tg}\,\varphi \doteq \sin\varphi \doteq \varphi$)

$$mg\,\mathrm{tg}\,\varphi = ma \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{a}{g}\,.$$



Obr. 1

Jak se vlastně propiska pohybuje? Na začátku je u stěny. Poté, co se tramvaj začne rozjíždět, propiska bude mít tendeci dostat se do své nové stabilní polohy. Její pohyb tedy lze chápat jako pohyb kyvadla s maximální výchylkou odpovídající úhlu φ v tíhovém poli, které uděluje zrychlení $\sqrt{a^2+g^2}$.

Maximální úhel, který svírá lanko s deskou, potom bude 2φ.

Kdy propiska zase ťukne o desku? Protože se jedná o harmonický pohyb, propiska narazí zpět na desku právě za jednu periodu. Perioda takovýchto kmitů matematického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}\,.$$

Došlá řešení byla vesměs správná. Někteří řešitelé si neuvědomili, že úloha se dala zjednodušit na kyvadlo, a řešili příklad pomocí zákona zachování energie, který špatně použili.

Roman Fiala
roman@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.