19. ročník, úloha I . P ... *příliv na Bali* *(5 bodů; průměr 2,34; řešilo 35 studentů)*

Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h 50 min). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy? *Zažil Honza Prachař na Mezinárodní FO na Bali.*

V tomto řešení nesvedeme vysvětlit tu pravou příčinu toho, že t. č. byl na Bali příliv jen jednou denně. Zmíníme však některé jevy, které by to mohly mít na svědomí.

Nejdříve se zamyslíme, zda bychom to dokázali vysvětlit jako statický jev, tj. zanedbáme tření vody v oceánech a mořích a budeme předpokládat, že hladina vody v každém okamžiku zaujímá tvar ekvipotenciální plochy.

Uvažujme jedno slapotvorné těleso (v našem případě Měsíc), jehož přítomnost způsobí změnu gravitačního potenciálu na povrchu Země. Jeho nekonstantní část má tvar[1]

$$\phi_{\mathrm{m}} = -\frac{Gma^2}{R^3}\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\psi - \tfrac{1}{2}\right),$$

kde m je hmotnost Měsíce, a je poloměr Země, R je vzdálenost středu Měsíce a Země a ψ je úhel měřený od spojnice Země a Měsíce (osy x, viz obr. 1). Potenciál je rotačně symetrický vzhledem k ose x.

Potenciál se slapy ve výšce h_2 bude stejný jako potenciál bez slapů ve výšce h_1

$$\phi(h_1) = \phi(h_2) + \phi_{\mathrm{m}}(h_2).$$

Vzedmutí hladiny bude zanedbatelné vzhledem k poloměru Země, potenciál ϕ_{m} je v blízkosti povrchu Země přibližně konstantní, proto dostáváme

$$gh_1 = gh_2 + \phi_{\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad h = h_2 - h_1 = -\frac{\phi_{\mathrm{m}}}{g}.$$

Pro gravitační zrychlení na povrchu Země platí $g = GM/a^2$, a tak pro výšku dmutí hladiny platí vztah

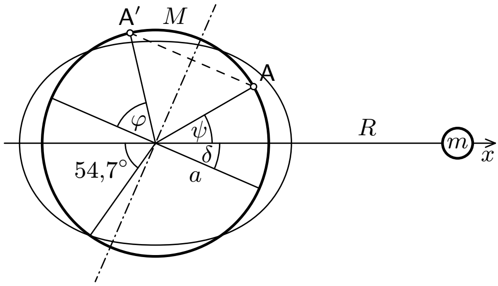
$$h = \frac{ma^4}{MR^3}\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\psi - \tfrac{1}{2}\right) \doteq 36\,\mathrm{cm}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\psi - \tfrac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Dmutí hladiny je znázorněno (ovšem zveličeně) na obrázku 1. Tento obrázek odpovídá tomu, co nás učili na hodinách zeměpisu. Na rovníku na straně přivrácené a odvrácené od Měsíce je příliv, jehož výška dosahuje maximálně 36 centimetrů. Na pólech je trvalý odliv 18 centimetrů. Teoretické hodnoty přílivu jsou skutečně tak malé, protože se však Země díky slapům sama deformuje, je skutečný posuv ekvipotenciální plochy celkového gravitačního potenciálu asi o 30 % větší.

Dále je samozřejmě také nutné započítat vliv Slunce, který není zanedbatelný. Vzedmutí hladiny způsobené Sluncem má stejný tvar jako (1) (při jeho odvozování se jen předpokládá $a \ll R$). Podle polohy Slunce se vlivy různým způsobem sčítají. T. č. byl na Bali úplněk, to znamená, že Slunce, Země a Měsíc byly na jedné přímce. Dmutí bylo tedy ve skutečnosti ještě větší. Nás zajímá kvalitativní výsledek, zda může jeden příliv zcela vymizet, proto není třeba dále vliv Slunce uvažovat.

[1] Vztah pro slapotvorný potenciál zde nebudeme odvozovat, protože ho můžete najít v literatuře, příp. v tomto článku `http://scienceworld.wolfram.com/physics/Tide.html`.

Co může způsobit jinou než dvanáctihodinovou periodu přílivu a odlivu? Je to deklinace Měsíce δ, která může dosahovat hodnot až $\pm 28{,}5^\circ$. Situace je názorná na obrázku 1, na něm je označena noční A a denní A′ poloha jednoho místa na povrchu Země. Vidíme, že výška vody není po 12 hodinách stejná.



Obr. 1

Pojďme vypočítat, jak se mění výška hladiny během dne pro různé zeměpisné šířky φ. Vztah (1) si přepíšeme pomocí souřadnice x místa na povrchu Země, platí totiž $x = a\cos\psi$.

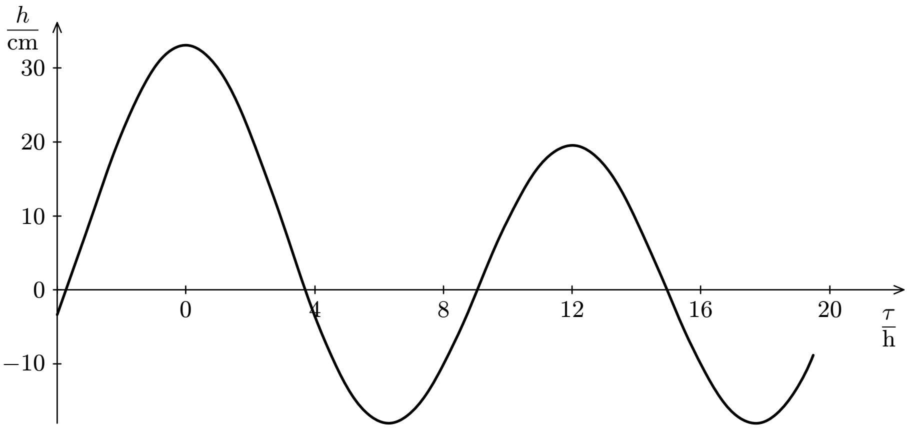
$$h = \frac{ma^2}{MR^3}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}a^2\right).$$

Budeme sledovat pohyb bodu A na zeměpisné šířce φ během dne (přerušovaná čára na obr. 1). Označme τ zeměpisnou délku (resp. čas během dne) sledovaného bodu, přičemž bod A má zeměpisnou délku $\tau(\mathsf{A}) = 0^\circ$ a bod A′ $\tau(\mathsf{A}') = 180^\circ$. Podle obrázku 1 se souřadnice x bodu A mění od hodnoty $a\cos(\varphi - \delta) = a\cos\varphi\cos\delta + a\sin\varphi\sin\delta$ (v noci) po hodnotu $-\cos(\varphi+\delta) = -a\cos\varphi\cos\delta + a\sin\varphi\sin\delta$ (ve dne). Jelikož se bod pohybuje po kružnici, musí souřadnice x záviset na zeměpisné délce prostřednictvím $\cos\tau$, a tudíž platí

$$x = a(\cos\tau\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta)$$

a tím máme výšku dmutí vyjádřenou jako funkci $h(\varphi, \tau)$.

Výška hladiny moře při deklinaci Měsíce $\delta = -23^\circ$ (tj. v létě při úplňku) na Bali (10° j. š.) v průběhu dne je vynesena v grafu 2.

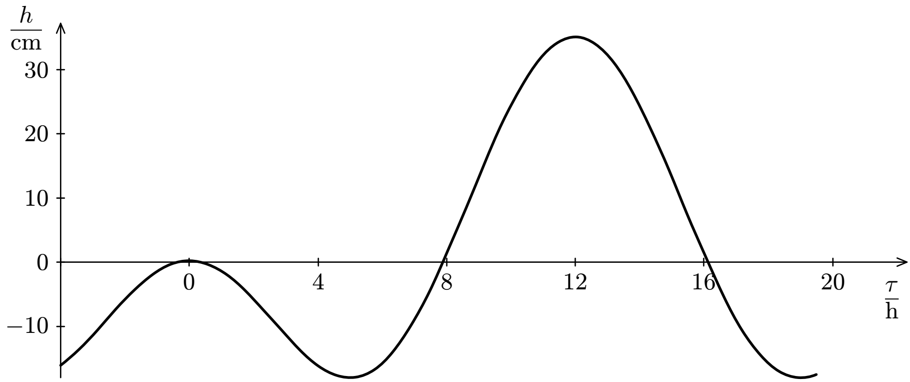


Obr. 2. Výška hladiny moře na 10° j. š.

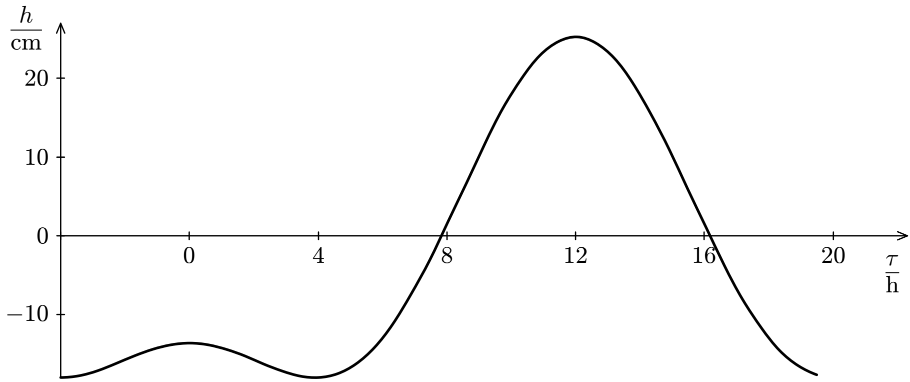
Noční příliv je tedy asi o 50 % vyšší než denní. Spolu s dalšími jevy to může být původní příčina toho, že byl t. č. na Bali pozorován jen jeden příliv denně. Příliv a odliv jsou dynamické procesy a na jejich výšce a času nástupu se výrazně podílí geologické podmínky – tvar pobřeží, tvar dna, blízkost jiné pevniny a vůbec poloha na mapě světa. T. č. na Bali byl příliv pozorován až v 6 h ráno, nikoli o půlnoci, přílivová vlna tedy přichází o dost později než potenciálové maximum.

Řešení doplníme konkrétními údaji. Pobřeží, na kterém bylo pozorování slapů prováděno, tvořily korálové útesy. Hluboké moře bylo až mnohem dále od pobřeží. Korálové útesy čněly nad hladinu moře a jen jednou denně byly schovány pod přílivovou vlnou. Druhá přílivová vlna mohla být, jak víme, nižší, a tudíž nezaplavila korálové útesy, a proto nemusela být vůbec zpozorována.

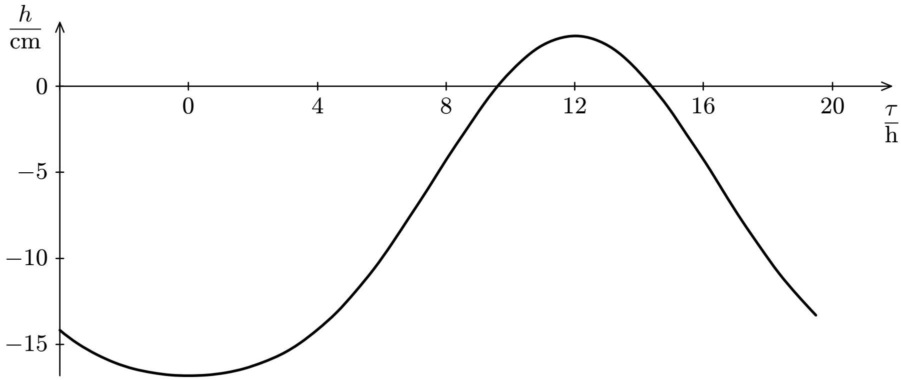
Na závěr si na grafech na obrázcích 3 až 5 prohlédněte, jak teoreticky vypadají slapové jevy v různých zeměpisných šířkách, při deklinaci Měsíce $\delta = -23°$. Na třicáté rovnoběžce má nižší příliv nulovou výšku, za polárním kruhem dokonce (jak si snadno rozmyslíte) může nastávat jen jeden příliv denně.



Obr. 3. Výška hladiny moře na 30° s. š.



Obr. 4. Výška hladiny moře na 50° s. š.



Obr. 5. Výška hladiny moře na 75° s. š.

Musím přiznat, že jsme tuto úlohu při zadání podcenili, doufaje, že jev půjde vysvětlit na základě sklonu zemské osy vůči rovině obíhání Měsíce. Leč se ukázalo, že slapové jevy jsou natolik komplikovaný děj, že žádné jednoduché vysvětlení jednodenního přílivu neexistuje. Uvedené řešení jsme konzultovali s *docentem Ctiradem Matyskou* z katedry geofyziky, za to mu na tomto místě děkujeme.

V řešeních jsem bodoval všechny rozumné myšlenky (tj. ty, které nebyly lživé). Potěšil mě *Marek Pechal*, který se jako jediný pokusil vypočítat průběh dmutí během dne – tj. naši funkci $h(\varphi, \tau)$.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.