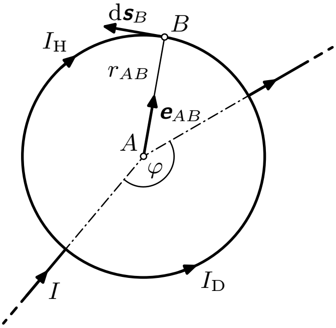
19. ročník, úloha I . 4 ... *hoďte si smyčku* *(4 body; průměr 3,08; řešilo 51 studentů)*

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 1). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R, úhel mezi radiálními přívodními dráty φ a proud v drátu I.

Úlohu navrhl Matouš Ringel.

Pro odstranění případných nejednoznačností v řešení si smyčku vhodně pootočíme, aby spodní oblouk byl ten kratší. Spodní index $_\mathrm{D}$ budeme užívat pro veličiny spodního oblouku a $_\mathrm{H}$ pro veličiny oblouku vrchního. Úhly budeme samozřejmě počítat v obloukové míře, tedy v radiánech.



Obr. 1

Nejdříve se vrhneme na rozdělení proudu. Jelikož budeme uvažovat ideální situaci, budeme považovat materiál drátu za homogenní a jeho průřez za konstantní. Pak je zřejmé, že odpor jednotlivých částí je přímo úměrný jejich délce, takže

$$\mathcal{R}_\mathrm{D} \sim l_\mathrm{D} = \varphi R\,, \quad \mathcal{R}_\mathrm{H} \sim l_\mathrm{H} = (2\pi - \varphi)R\,,$$

kde $\mathcal{R}$ značí odpor jednotlivých oblouků a l jejich délky. Také z Kirchhoffových zákonů plyne, že co do uzlu vteče, to také vyteče, neboli $I = I_\mathrm{H} + I_\mathrm{D}$. Když použijeme předchozí úměru a Ohmův zákon, získáme vztah mezi velikostmi obou proudů

$$I_\mathrm{D} = \frac{(2\pi - \varphi)}{\varphi} I_\mathrm{H}\,. \tag{1}$$

Nyní vypočítáme příspěvky jednotlivých částí obvodu k magnetické indukci ve středu smyčky. Pokud nám (či fyzikálním tabulkám) budete věřit nebo vám integrování nic neříká, můžete přeskočit následující odstavec.

Vyjdeme z Biot-Savartova zákona[1], který popisuje příspěvek proudu vodičem k magnetické indukci v bodě A.

$$\boldsymbol{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int\limits_{\text{celý vodič}} \frac{I\boldsymbol{e}_{AB} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}_B}{r_{AB}^2}\,,$$

kde $\boldsymbol{e}_{AB}$ je jednotkový vektor směřující od A k délkovému elementu vodiče $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_B$ a r_{AB} je délka spojnice bodu A a elementu vodiče $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_B$. Integrujeme samozřejmě po celém vodiči. Všimneme si, že pro přívodní dráty je vektorový součin nulový, a tak i jejich příspěvek k magnetickému poli je nulový.

Budeme uvažovat stálý proud I obloukem kružnice s počátečním úhlem φ_0 a konečným φ_1 o poloměru R. Když nyní budeme řešit příspěvek k magnetické indukci ve středu oblouku, uvědomíme si, že vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_B$ a $\boldsymbol{e}_{AB}$ jsou na sebe kolmé a oba leží v rovině, ve které leží oblouk. Zavedeme jednotkový vektor $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_{AB} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}_B / |\mathrm{d}\boldsymbol{s}_B|$ (kolmý k rovině oblouku) a substituci $|\mathrm{d}\boldsymbol{s}_B| = R\,\mathrm{d}\varphi$. Předchozí integrál můžeme přepsat jako

$$\boldsymbol{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\boldsymbol{\nu} I\,\mathrm{d}\varphi}{R} = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{d}\varphi = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} (\varphi_1 - \varphi_0)\,.$$

[1] viz například Feynmanovy přednášky z fyziky

Nyní již víme, v jakém poměru se rozdělí proud a jaký je příspěvek k magnetické indukci proudu procházejícího tenkým vodičem ve tvaru oblouku. Dosadíme do vztahu pro příspěvek k magnetické indukci ve středu smyčky od spodního oblouku

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{D} = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_\mathrm{D}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\varphi - 0) = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_\mathrm{D}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\,.$$

Obdobně dosadíme pro horní oblouk, musíme jen dát pozor na to, abychom zachovali stejný směr vektoru $\boldsymbol{\nu}$, neboli musíme zachovat stejný smysl obíhání oblouku. Tím ale získáme oblouk, kterým neteče proud I_H, nýbrž $-I_\mathrm{H}$.

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{H} = -\frac{\boldsymbol{\nu}(-I_\mathrm{H})}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(2\pi - \varphi) = \frac{\boldsymbol{\nu} I_\mathrm{H}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\,(2\pi - \varphi)\,.$$

Když tyto příspěvky sečteme a využijeme vztah (1), získáme nulový vektor

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{H} + \boldsymbol{B}_\mathrm{D} = \boldsymbol{0}\,.$$

Takže jsme došli k závěru, že magnetická indukce ve středu smyčky bude nulová.

Petr Sýkora
petr@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.