

19. ročník, úloha I. 1 ... opravdu Saturn plave? (4 body; průměr 3,18; řešilo 62 studentů)

Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtete ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti.

Při pozorování Saturnu vymyslel Pavel Brom.

Cílem této úlohy je vypočítat hustotu Saturnu pouze s pomocí doby oběhu T jeho měsíce Titanu a doby, po kterou je Titan v jeho stínu. Některé možná překvapí, že na to nepotřebujeme určit hmotnost Saturnu ani jeho objem. Hustota je totiž jenom poměr těchto dvou veličin. Hmotnost můžeme vyjádřit pomocí třetího Keplerova zákona jako závislou veličinu podobně jako objem z doby přechodu stínem.

Na začátku se dohodneme, že paprsky určující geometrický stín Saturnu jsou díky velké vzdálenosti Saturnu rovnoběžné. V dalším zjednodušení budeme pokládat dráhu Titanu za kruhovou (čímž rovněž neučiníme větší chybu). Vyjdeme ze vztahu pro rovnost odstředivé a gravitační síly a vyjádříme hmotnost Saturnu M .

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\omega^2 r^3}{G}, \quad (1)$$

kde ω je úhlová oběžná rychlost Titanu, r poloměr jeho oběžné dráhy a G gravitační konstanta. Tím jsme vlastně využili třetí Keplerův zákon. Po dosazení za úhlovou rychlost $\omega = 2\pi/T$ dostáváme

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}.$$

K určení objemu potřebujeme vyjádřit poloměr Saturnu. Využijeme dobu t pohybu Titanu v geometrickém stínu Saturnu. Teď můžeme pokračovat dvěma různě přesnými výpočty.

- a) **Aproximace části dráhy Titanu ve stínu přímkou** (neboť díky velké vzdálenosti Titanu od Saturnu je jen málo zakřivená). Průměr Saturnu pak bude $d = vt = \omega r t$, kde t je čas pohybu Titanu ve stínu. Po dosazení do vztahu pro objem koule získáme pro objem Saturnu $V = \pi\omega^3 r^3 t^3 / 6$. Pomocí (1) vyjádříme hustotu Saturnu takto

$$\rho = \frac{6}{G\pi\omega t^3} = \frac{3T}{G\pi^2 t^3}.$$

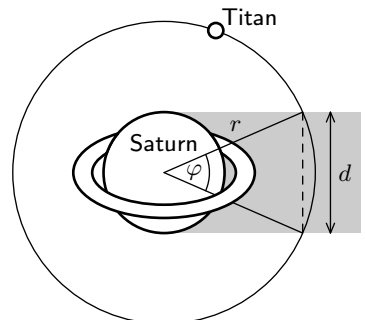
Číselná hodnota je $625 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

- b) **Aproximace části dráhy Titanu ve stínu kružnicí**. Poloměr Saturnu můžeme získat následovně. Úhlovou dráhu φ , kterou projde Titan ve stínu, určíme ze vztahu

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi t}{T}.$$

Pro průměr Saturnu pak bude platit $d = 2r \sin(\varphi/2) = 2r \sin(\pi t/T)$ a pro objem dostaneme

$$V = \frac{1}{6} \pi \left(2r \sin \frac{\pi t}{T} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \sin^3 \frac{\pi t}{T}.$$



Obr. 1

Hmotnost zůstává stejná jako v předchozím případě a pro hustotu získáváme vztah

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2 \sin^3(\pi t/T)}.$$

Dosažením vypočítáme hustotu Saturnu $626 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Vidíme, že výsledky se od sebe téměř neliší. Aproximaci jsme tedy zvolili správně. V obou případech jsme pouze z doby oběhu a doby přechodu stínem určili průměrnou hustotu Saturnu.

Otázkou zůstává reálnost takového pozorování. Pokud by Titan obíhal Saturn v neměnné rovině prstenců, pak by takové pozorování bylo možné jenom v době, kdy vidíme prstence Saturnu téměř přesně ze strany, tedy dvakrát za jeden oběh Saturnu kolem Slunce, obecně by to však bylo možné ještě méně často. Zkuste si také vypočítat, do jaké vzdálenosti sahá úplný stín Saturnu za jeho vzdálenost od Slunce a kde začíná polostín.

Z došlých řešení lze usuzovat, že úloha nebyla příliš jednoduchá. Mnohé řešitele zmátlo minimum zadaných hodnot. Nevšimli si možné aproximace dráhy Titanu ve stínu přímkou a se vzniklými vztahy si pak už nevěděli rady. Na druhou stranu přišlo také dost správných řešení bez použití aproximace. Protože se výsledky téměř neliší, pokládali jsme oba typy řešení za správné.

Navíc ve všech řešeních jste automaticky předpokládali, že Titan projde přesně středem stínu, což však nebylo ze zadání vůbec zřejmé. Za tento postřeh děkujeme *Vojtovi Moldovi*.

Roman Fiala, Peter Greškovič & Zdeněk Kučka
rf@atlas.cz, grepe@matfyz.cz, kucka.zdenek@atlas.cz