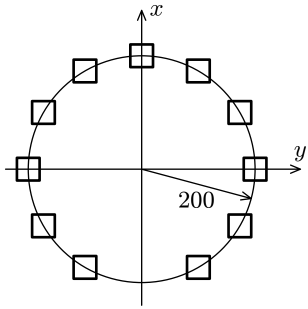
18. ročník, úloha VI . P ... *výlet na Stonehenge* *(5 bodů; průměr 1,08; řešilo 13 studentů)*

Představte si, že v raketě prolétáváte nad Stonehenge. Ten je tvořen kameny ve tvaru kvádrů rozmístěných do vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku (viz obrázek 1) o poloměru 200. Letíte nad osou x ve výšce $z = 50$ a díváte se vodorovným směrem. Když jste v bodě o souřadnicích $(-200, 0)$, resp. $(0, 0)$, uvidíte svět přesně tak, jak je zobrazen na obrázku 2, resp. 3. Váš stojící kamarád jej ovšem uvidí jinak, a sice jako na obrázku 4, resp. 5, přičemž oba máte shodné oči (tzn. např. stejný zorný úhel). Z obrázků přibližně určete poměr rychlosti rakety a rychlosti světla.

Úlohu navrhl a obrázky sehnal Matouš Ringel.

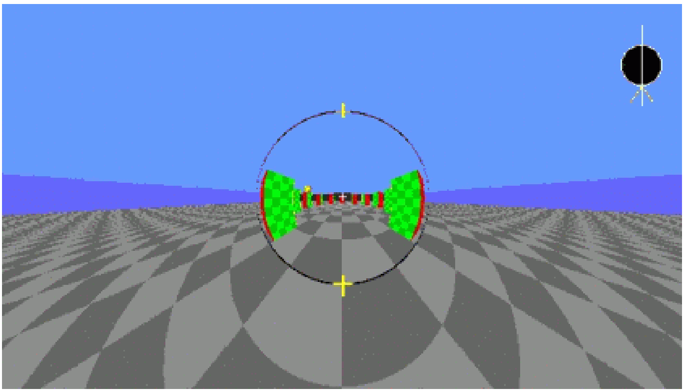


Obr. 1

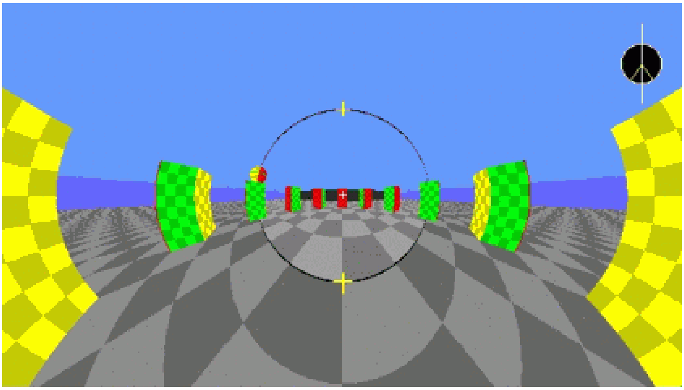
Tuto úlohu bylo možné řešit hned několika způsoby. Pro nedočkavce, kteří chtějí znát pouze nejjednodušší (i když nevšeobecné) řešení, uvedeme zkraje vtipný postup *Antona Repka*.

Povšimněme si, že střed Stonehenge (jejž rozpoznáme pomocí šachovnicové sítě na zemi) je na obrázcích 3 a 4 s velkou přesností na stejném místě. Předpokládáme-li, že zorný úhel stojícího a letícího pozorovatele je stejný, musí být stejné i úhly, pod kterými paprsek světla dopadá do oka pozorovatelů. Obrázek 3 se týká letícího pozorovatele v bodě $(0, 0, 50)$, obrázek 4 stojícího pozorovatele v bodě $(-200, 0, 50)$. Do oka stojícího pozorovatele paprsek ze středu (o souřadnicích $(0, 0, 0)$) dopadá pod úhlem $\mathrm{arctg}(50/200)$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka. V soustavě spojené s raketou dopadá pod stejným úhlem; příčné rozměry těles se při Lorentzových transformacích nemění. Odtud plyne, že v době, kdy paprsek opustil střed, musel mít střed x'-ovou souřadnici rovnu 200. Jelikož ale paprsek do oka pozorovatele dopadl přesně, když byl střed pod raketou, musel se do výšky 50 dostat za stejný čas, za který střed urazil vzdálenost 200. Odtud

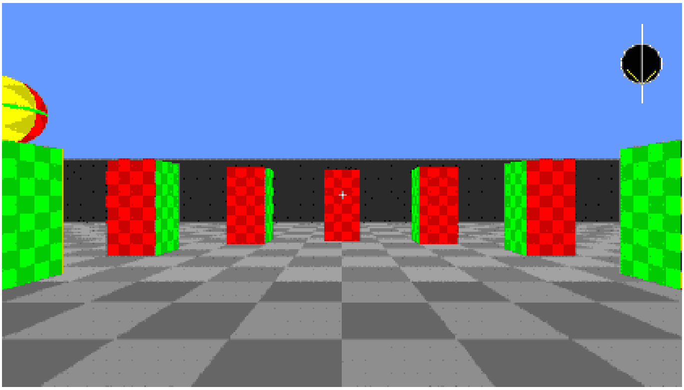
$$v = c \cdot \cos\alpha = c \cdot \frac{200}{\sqrt{200^2 + 50^2}} \approx 0{,}970c\,.$$



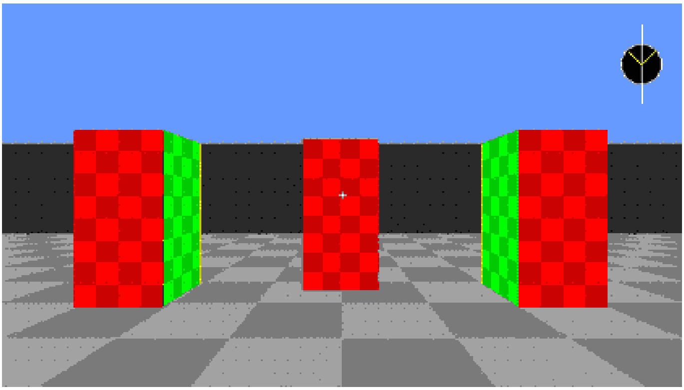
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Ve skutečnosti byla rychlost rakety $v = 0{,}969c$, takže shoda je výborná. Nicméně stejnost poloh středů byla čistě náhodná; při jakékoliv jiné rychlosti, poloze či absenci jednoho z párů obrázků fotografovaných ze stejných míst bychom tento postup použít nemohli.

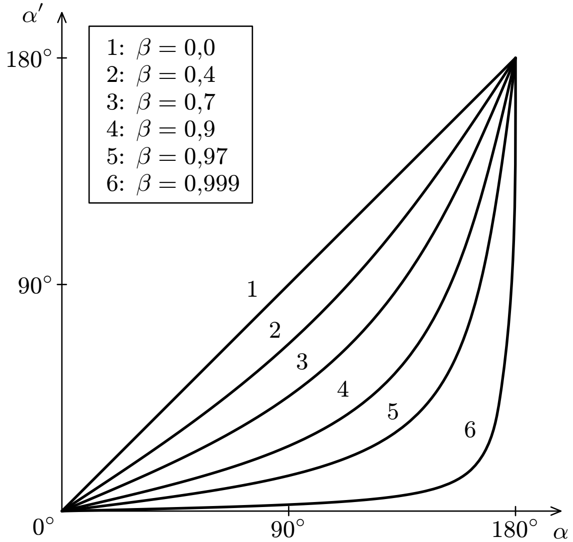
Mnozí z vás se podivovali nad zdánlivým paradoxem; v relativitě se totiž podélné vzdálenosti zkracují a příčné zachovávají, zorný úhel by se měl proto zmenšit. Chyba! Špatně jsme použili kontrakci délek, což seznáme, když situaci podrobně propočteme pomocí Lorentzových transformací. My půjdeme trochu jiným směrem, využijeme známých vzorců pro skládání rychlostí (viz např. seriál v 15. ročníku). Představme si dvě vztažné soustavy, které se přibližují rychlostí u (kupříkladu soustava středu Stonehenge (S) a rakety (S')). Jestliže se těleso v soustavě S pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$, v soustavě S' bude mít rychlost $\boldsymbol{v}' = (v'_x, v'_y)$, pro kterou platí

$$v'_x = \frac{v_x + u}{1 + v_x u/c^2}\,, \quad v'_y = v_y\,\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}\,.$$

Uvažujme nyní o světelném paprsku, jenž se v soustavě S šíří (a na sítnici oka stojícího pozorovatele dopadá) pod úhlem α; rychlost paprsku je $\boldsymbol{v} = (c\cos\alpha, c\sin\alpha)$. Úhel α', pod kterým paprsek dopadá na sítnici pozorovatele v raketě, je potom dán vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{v'_y}{v'_x} = \sin\alpha\,\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\cos\alpha + u/c}\,.$$

Závislost úhlu α' na úhlu α je znázorněna na obrázku 6 pro různé hodnoty $\beta = u/c$. Pokud se díváme ve směru letu, zorný úhel se doopravdy zvětšuje (neboť $\alpha > \alpha'$). Naopak, díváme-li se dozadu, uvidíme menší část prostoru.



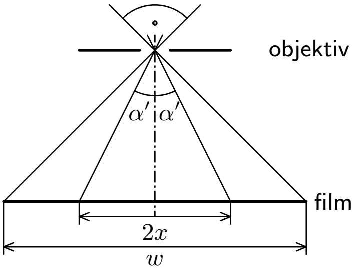
Obr. 6. Závislost úhlu α' na úhlu α pro různé hodnoty $\beta = u/c$.

Dejme tomu, že jsme obraz zaznamenávali fotoaparátem. V takovém případě se zachovávají úhly paprsků. Ježto je vzdálenost filmu od objektivu konstantní, průsečík paprsku s filmem bude ve vzdálenosti $d \operatorname{tg} \alpha$, kde d je vzdálenost objektivu od filmu a α je úhel, jejž svírá paprsek s optickou osou. To znamená, že vzdálenost na obrázku je úměrná $\operatorname{tg} \alpha$ příslušného paprsku.

V této chvíli si již můžeme libovolně zvolit směr, ve kterém budeme měřit vzdálenosti a porovnávat polohu stejných paprsků na obrázku vestoje a za letu. Zde v řešení budeme zjišťovat polohu kvádrů o souřadnicích $(0, \pm 200)$, budeme pracovat ve vodorovné rovině. Stojíce v bodě $(0, 0)$ bychom měli tyto kvádry vidět pod úhlem 90°. Úhel za letu můžeme odměřit z obrázku 3.

Z obrázku 4 plyne, že zorný úhel fotoaparátu je 90°. Zorným úhlem zde rozumíme úhel, jejž svírá levý krajní paprsek s pravým krajním paprskem. Pro poměr vzdálenosti středu levého kvádru od středu obrázku x ku šířce obrázku máme $2x/w = \operatorname{tg} \alpha' / \operatorname{tg} 45^\circ$. Odměříme

$$2x/w \approx 0{,}256 \approx \operatorname{tg} \alpha' .$$



Obr. 7

Známe $\alpha = 90^\circ$, pročež platí rovnice $\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{1 - \beta^2}/\beta$, odkud úpravou dostaneme

$$u = \beta \cdot c = \frac{c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \approx 0{,}969c ,$$

takže jsme se do správné hodnoty trefili opět výborně.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.