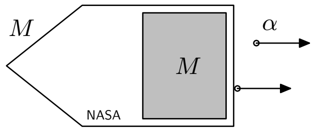
18. ročník, úloha VI . 3 ... sonda NASA *(4 body; průměr 2,70; řešilo 20 studentů)*

Jet Propulsion Laboratory v Kalifornii vyvíjí pro NASA nový typ raketových pohonů. Pohonná jednotka využívá hybnost α-částic při rozpadu nuklidu fermia $^{257}_{100}Fm_{157}$, jehož hmotnost je m_{Fm} a poločas rozpadu T. Druhým produktem přeměny je nuklid kalifornia $^{253}_{98}Cf_{155}$. Hmotnost α-částice je m_α, hmotnost nuklidu kalifornia je m_{Cf}, přeměnou se uvolní energie E. Předpokládejte, že každá α-částice opouští raketu ve stejném směru.



Obr. 1

Vesmírná sonda s popsaným pohonem je na počátku v klidu, její hmotnost je M, hmotnost pohonné látky je také M. Určete rychlost sondy v po přeměně poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Výslednou hodnotu dopočítejte i číselně pro hodnoty $E = 1{,}106 \cdot 10^{-12}$ J, $M = 4$ kg a $T = 100{,}5$ dní, ostatní hodnoty najdete v tabulkách.

Úloha byla převzata ze slovenské Fyzikální olympiády.

Pozorujme sondu z její vztažné soustavy, ve které jsou atomy fermia v klidu. Při rozpadu fermia na α-částici a kalifornium platí zákon zachování hybnosti $p_\alpha = p_{\mathrm{Cf}}$. Vzhledem k tomu, že uvolněná energie $E \ll m_\alpha c^2$, můžeme hybnost α-částice vyjádřit v klasickém nerelativistickém tvaru $p_\alpha = m_\alpha v_\alpha$. Stejně tak můžeme zapsat i zákon zachování energie v nereleativistickém tvaru, tj. vyzářená energie bude rovna energiím, které získají kalifornium a α-částice

$$E = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{\mathrm{Cf}}^2}{2m_{\mathrm{Cf}}} = p_\alpha^2 \frac{m_\alpha + m_{\mathrm{Cf}}}{2m_\alpha m_{\mathrm{Cf}}} \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = \sqrt{\frac{2Em_\alpha m_{\mathrm{Cf}}}{m_\alpha + m_{\mathrm{Cf}}}} \,.$$

Nyní určíme, kolik částic se rozpadne v zadané úloze. Necháváme rozpadnout jednu polovinu hmotnosti nuklidů fermia. Za předpokladu, že známe hmotnost jednoho nuklidu fermia, můžeme určit, kolik částic se rozpadlo $N = M/2m_{\mathrm{Fm}}$. Dále potřebujeme vědět, jak se změní rychlost Δv_k sondy při vyzáření jedné α-částice za předpokladu, že předtím už uniklo k α-částic. Celková hmotnost sondy bude rovna $M_{\mathrm{c}} = 2M - m_\alpha k$. Ze zákona hybnosti mezi α-částicí a sondou pak platí

$$p_\alpha = M_{\mathrm{c}} \Delta v_k \quad \Rightarrow \quad \Delta v_k = \frac{p_\alpha}{M_{\mathrm{c}}} = \frac{p_\alpha}{2M - m_\alpha k} \,. \tag{1}$$

A teď se už konečně pustíme do řešení hlavního problému úlohy. Chceme určit rychlost po rozpadu N nuklidů fermia. Doteď jsme zatím nepoužili nic z relativity. Předpokládejme, že se už rozpadl určitý počet nuklidů fermia a sonda má rychlost v, v opačném směru právě vylétává α-částice a zvyšuje rychlost sondy o Δv. Chceme určit novou rychlost sondy v', k tomu použijeme vzoreček pro relativistické skládání rychlostí

$$v' = \frac{v + \Delta v}{1 + v\Delta v/c^2} \,.$$

Tímto způsobem sčítat rychlosti je však zřejmě dost složité, uvědomíme-li si, že Δv je závislé na počtu rozpadlých α-částic. Proto si usnadníme práci a všimneme si, jak vypadá vzoreček pro součet argumentů v hyperbolickém tangentu.

$$\operatorname{tgh} \alpha' = \operatorname{tgh}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\Delta\alpha}{1 + \operatorname{tgh}\alpha \operatorname{tgh}\Delta\alpha} \,.$$

Tento vzoreček je přece velice podobný vzorečku pro relativistické skládání rychlostí! Stačí použít následující substituce a dostaneme přímo vzorec výše uvedený

$$\operatorname{tgh}\alpha' = \frac{v'}{c}\,, \quad \operatorname{tgh}\alpha = \frac{v}{c}\,, \quad \operatorname{tgh}\Delta\alpha = \frac{\Delta v}{c}\,.$$

Tento trik nám tedy umožní sčítat rychlosti přímo jako argumenty hyperbolického tangentu. Na počátku je sonda v klidu. Rychlost V po rozpadu N částic vypočteme takto

$$\frac{V}{c} = \operatorname{tgh}\beta = \operatorname{tgh}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)\,, \tag{2}$$

kde úhly α_i odpovídají změnám rychlostí Δv_i. Dle výše uvedené substituce víme, že

$$\operatorname{tgh}\alpha_i = \frac{\Delta v_i}{c}\,.$$

Odsud můžeme vyjádřit α_i (argument hyperbolického tangentu lze vyjádřit pomocí logaritmu)

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\ln\frac{c+\Delta v_i}{c-\Delta v_i} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + 2\,\frac{\Delta v_i}{c-\Delta v_i}\right).$$

S tímto by se nám ovšem dost špatně počítalo, nehledě na to, že můžeme provést velice dobrou aproximaci. Člen $\Delta v_i/(c-\Delta v_i)$ je velice malý, lze proto použít aproximaci $\ln(1+x) \approx x$ pro malé x

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + 2\,\frac{\Delta v_i}{c-\Delta v_i}\right) \approx \frac{\Delta v_i}{c-\Delta v_i}\,.$$

Nyní dosadíme aproximaci α_i do rovnice (2)

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh}\left(\frac{\Delta v_1}{c-\Delta v_1} + \cdots + \frac{\Delta v_N}{c-\Delta v_N}\right),$$

kde Δv_i jsme si vyjádřili v (1). Sečíst řadu v hyperbolickém tangentu není sice až tak velký problém, ale podíváme-li se na vztah pro Δv_i, zjistíme, že změna hmotnosti sondy ze dá zanedbat. Hmota, která unikne v podobě α-částic, je vskutku zanedbatelná. Všechny členy Δv_i aproximujeme Δv_0.

Vraťme se tedy zpět k našemu výpočtu.

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh}\left(\frac{\Delta v_1}{c-\Delta v_1} + \cdots + \frac{\Delta v_N}{c-\Delta v_N}\right) \approx \operatorname{tgh}\left(N\frac{\Delta v_0}{c-\Delta v_0}\right).$$

Chyba oproti přesnému součtu se projeví až na sedmém řádu, použitá aproximace je tedy opravdu vhodná. Hledané V je rovno

$$V \approx c\operatorname{tgh}\left(N\frac{\Delta v_0}{c-\Delta v_0}\right) \approx c\operatorname{tgh}\left(\frac{N\Delta v_0}{c}\right).$$

Zadané hodnoty jsou tyto

$$u \doteq 1{,}661\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,, \quad m_{\mathrm{Fm}} \doteq 257{,}1\,\mathrm{u}\,, \quad m_{\mathrm{Cf}} \doteq 253{,}1\,\mathrm{u}\,, \quad m_\alpha \doteq 4{,}002\,\mathrm{u}\,,$$
$$c \doteq 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \quad M = 4\,\mathrm{kg}\,, \quad E = 1{,}106\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$$

a pro ně vychází

$$p_\alpha \doteq 1{,}203 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}, \quad N \doteq 4{,}683 \cdot 10^{24}, \quad \Delta v_0 \doteq 1{,}504 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

a

$$V \doteq 70{,}43\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}.$$

Nakonec si ještě všimněme, že v této úloze nebylo podstatné, jak velký je poločas rozpadu. Ptali jsme se totiž na rychlost sondy po rozpadu poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Poločas rozpadu může být libovolně velký, chceme jen, aby sonda stačila ustálit svou rychlost mezi jednotlivými rozpady.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.