18. ročník, úloha V . S ... *Merkur, jáma a kyvadlo* *(6 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů)*

V následujících úlohách ověříme vaši znalost všech dosud probraných kapitol mechaniky, tj. Newtonova formalismu, D'Alembertova principu a Lagrangeova formalismu.

a) *Představte si planetu Merkur obíhající kolem Slunce. Jak známo, jeho eliptická trajektorie se stáčí (posouvá se poloha perihélia), což nemůže být způsobeno gravitační silou*

$$\boldsymbol{F} = \varkappa \frac{mM\boldsymbol{r}}{r^3}\,.$$

Dokažte, že když k této síle přidáme dodatečnou centrální sílu

$$\boldsymbol{F} = C\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}\,, \tag{1}$$

kde C je vhodná konstanta, celá trajektorie (elipsa) se bude otáčet konstantní úhlovou rychlostí (čili existuje vztažná soustava otáčející se konstantní úhlovou rychlostí taková, že trajektorie v ní bude elipsa). Znáte-li tuto úhlovou rychlost Ω, určete konstantu C. Stačí takováto oprava k záchraně Newtonovy teorie gravitace?

b) *Určete rovnovážné polohy homogenní tenké tyčky délky l opřené o vnitřní stěny jamky ve tvaru písmene „V" (viz obr. 1) v závislosti na vrcholovém úhlu jamky α.*

c) *Pomocí Lagrangeových rovnic vypočítejte periodu malých kmitů dvojzvratného kyvadla na obrázku 2. Závaží na koncích nehmotné tyčky délky l mají hmotnosti m_1 a m_2, vzdálenost bodu závěsu od závaží o hmotnosti m_1 je l_0.*

Na úlohu a) narazil Matouš v jedné pěkné ruské knize.
Úlohu b) zadali Honza Prachař a Jarda Trnka.
Úloha c) zazněla na cvičeních z teoretické mechaniky doc. Podolského.

a) Vyřešme úlohu nejprve za pomoci Newtonova formalismu. Pohybová rovnice Merkuru v inerciální vztažné soustavě spojené se Sluncem bude

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\varkappa \frac{mM\boldsymbol{r}}{r^3}\,. \tag{2}$$

Nyní přidáme dodatečnou sílu (1), která je úměrná $1/r^3$, a přejdeme do neinerciální soustavy, která se otáčí *nekonstantní* úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}$ vůči té předchozí. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\varkappa \frac{mM\boldsymbol{r}}{r^3} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r} - 2m\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} - C\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}\,, \tag{3}$$

kde druhý člen na pravé straně je odstředivá síla, třetí člen Eulerova síla a čtvrtý člen Coriolisova síla (viz druhý díl seriálu).

Jedním z integrálů pohybové rovnice (2) je moment hybnosti $l = m\omega r^2 = \text{konst}$ ($\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost rotace Merkuru kolem Slunce). Po přidání dodatečné centrální síly zůstane zákon zachování momentu v platnosti

$$m\omega r^2 + m\Omega r^2 = l + m\Omega r^2 = \text{konst}\,,$$

to znamená, že i výraz $L = m\Omega r^2$ je podél trajektorie konstantní. Odtud pro $\dot{\Omega}$ dostaneme

$$\dot{\Omega} = -\frac{2L}{mr^3}\,\dot{r} = -\frac{2\Omega}{r}\,\dot{r}\,,$$

pro vektor platí (vektory $\boldsymbol{\Omega}$ a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ jsou rovnoběžné, protože pohyb Merkuru je rovinný)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\,\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{r}}{r}\,\boldsymbol{\Omega}\,.$$

Přepišme s využitím posledního výsledku rovnici (3). Dostaneme

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\varkappa\,\frac{mM\boldsymbol{r}}{r^3} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{2m\dot{r}}{r}\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} - 2m\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} - C\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}\,, \tag{4}$$

Abychom zcela vyhověli předpokladům (tj. trajektorie Merkuru jsou v obou vztažných soustavách identické), musí mít rovnice (2) a (4) na pravé straně stejnou sílu, tedy musí platit

$$\frac{C}{mr^4}\,\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{2\dot{r}}{r}\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}\,.$$

Rychlost Merkuru si můžeme rozepsat do dvou kolmých složek $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{r}/r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, pak se poslední vztah zjednoduší na

$$\frac{C}{mr^4}\,\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,.$$

Oba výrazy na pravé straně upravíme pomocí vektorové identity $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ a využijeme toho, že $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ resp. $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ (vektory jsou na sebe kolmé). Dostaneme

$$\frac{C}{mr^4}\,\boldsymbol{r} = \Omega^2\boldsymbol{r} + 2\omega\Omega\boldsymbol{r}\,,$$

Zanedbáme-li člen úměrný Ω^2, čili předpokládáme, že úhlová rychlost stáčení perihelia je zanedbatelně malá vzhledem k úhlové rychlosti oběhu planety kolem Slunce, pro C obdržíme

$$C = 2m\omega\Omega r^4 = \frac{2lL}{m}\,. \tag{5}$$

Vidíme tedy, že síla $\boldsymbol{F} = C\boldsymbol{r}/r^4$ skutečně způsobuje stáčení perihelia, neboť C vyšla jako konstantní funkce. Tato síla však v žádném případě nezpůsobí otáčení celé trajektorie konstantní úhlovou rychlostí, protože jednoduše Ω není konstanta (což je vidět ze vztahu $L = m\Omega r^2 = \mathrm{konst}$). Zadaní se vás snažilo svést na špatnou cestu!

Pro ilustraci vypočítáme, o kolik se perihelium pootočí po jednom oběhu Merkuru kolem Slunce.

$$\Delta\varphi = \int_0^T \Omega\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\Omega}{\omega}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{L}{l}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\,\frac{L}{l}\,,$$

s využitím vztahu (5) dostaneme

$$\Delta\varphi = \frac{\pi mC}{l^2}\,. \tag{6}$$

Zbývá odpovědět, zda takováto oprava zachrání Newtonovu teorii gravitace. Astronomové naměřili, že perihélium Merkuru se stáčí o $575''$ za století. Zdá se, že je to v rozporu s Newtonovou teorií, podle které jsou trajektorie částic v centrálním poli stacionární. To však platí jen pro systém dvou těles. Pokud uvážíme vliv ostatních planet Sluneční soustavy, zjistíme z Newtonovy teorie, že způsobuje stáčení perihelia Merkuru (jejich vliv je totiž ekvivalentní zavedení síly úměrné $1/r^3$). Na stáčení perihelia má také nepatrný vliv zploštění Slunce. Všechny tyto efekty způsobují dohromady stáčení perihelia o $532''$ za století, stále však schází vysvětlit zbylých $43''$ (astronomové jsou ochotni připustit chybu nejvýše zlomek úhlové vteřiny).

Po vyloučení všech dalších možných efektů, které by mohly stáčení perihelia způsobit (planetka mezi Sluncem a Merkurem či hmota jiného druhu), selhala i úprava Newtonovy teorie gravitace (že naše úprava také nepomůže, ukážeme dále). Záhadné stáčení perihelia vysvětlila až Einsteinova teorie obecné relativity, podle které

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\varkappa M}{c^2 a(1+\varepsilon)} \tag{7}$$

(a je vzdálenost perihelia od Slunce, ε je výstřednost dráhy). Pro zajímavost vypočtené a naměřené (nevysvětlené) hodnoty stáčení perihelia těles Sluneční soustavy shrnuje následující tabulka.

	Merkur	Venuše	Země	Ikarus
předpověď OTR [$''$/stol]	43,0	8,6	3,8	10,3
změřeno [$''$/stol]	$43{,}1 \pm 0{,}5$	$8{,}4 \pm 4{,}8$	$5{,}0 \pm 1{,}2$	$9{,}8 \pm 0{,}8$

Velká nepřesnost měření u Země a Venuše je způsobená malou výstředností jejich dráhy, jejíž vinou se stáčení špatně měří. Vidíme tedy, že předpovědi OTR jsou ve velice dobré shodě s experimentem (potvrzují to i moderní měření).[1]

Porovnejme vztahy (6) a (7). Po námi provedené opravě Newtonovy teorie vychází, že stáčení perihelia závisí na momentu hybnosti planety. Naopak vztah (7) plynoucí z OTR říká, že stáčení perihelia závisí čistě na geometrii trajektorie (výstřednost a délka poloosy eliptické trajektorie, hmotnost Slunce). Odtud je zřejmé, že naše oprava Newtonovy teorie nemůže odpovídat realitě.

Nyní stejnou úlohu vyřešíme (výklad bude poněkud stručnější) pomocí silnějšího Lagrangeova formalismu. Lagrangián částice v centrálním poli $V(r)$ v polárních souřadnicích je

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - V(r)\,.$$

Langrangián nezávisí explicitně na čase ani souřadnici φ, okamžitě tedy máme dva integrály pohybu (viz minulý díl seriálu). Jsou to celková energie a moment hybnosti

$$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + V(r)\,, \quad l = mr^2\dot{\varphi}\,.$$

Z obou rovnic vyloučíme $\dot{\varphi}$ a máme rovnici

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2}\right) + V(r) = E\,.$$

1) Pěkný článek o anomálním stáčení perihelia – `http://www.mathpages.com/rr/s6-02/6-02.htm`.
Applet pro simulaci relativistického stáčení perihelia – `http://www.aldebaran.cz/applets/fy_grav/start.html`

Hledáme neznámou funkci $r(\varphi)$ (tj. trajektorii částice v polárních souřadnicích). Rovnice se zjednoduší zavedením substituce $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$, pak totiž

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\, u'\dot{\varphi} = -u'\, \frac{l}{m}$$

a naše rovnice získá tvar

$$u'^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}(E - V)\,.$$

Nepěkných druhých mocnin se zbavíme zderivováním rovnice podle φ

$$2u'u'' + 2u'u = -\frac{2m}{l^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}u'\,,$$

za předpokladu $u' \neq 0$ dostaneme známou rovnici, které se říká Binetův vzorec

$$u'' + u = -\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}\,.$$

Potenciál ve Sluneční soustavě předpokládáme ve tvaru $V(u) = -\varkappa Mmu - Cu^2$ (pro konstantu C nechť platí $C \ll l^2/m$). Řešíme tedy rovnici

$$u'' + \left(1 - \frac{Cm}{l^2}\right) u = \frac{\varkappa Mm^2}{l^2}\,.$$

Řešení je snadné, za předpokladu $C \ll l^2/m$ se jedná o rovnici harmonických kmitů, proto

$$u(\varphi) = A\cos\left(\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{Cm}{l^2}}\right) + \frac{\varkappa Mm^2}{l^2}\,.$$

Jediné, co nás bude zajímat, je stáčení perihélia, tedy jak se liší perioda funkce $u(\varphi)$ od 2π.

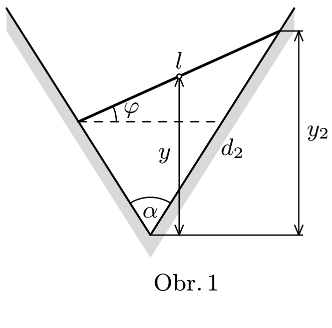
$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1 - Cm/l^2}} - 1\right) \approx \frac{\pi m C}{l^2}\,,$$

což je v souladu s (6).

b) V seriálu jsme ukázali, že pro hledání rovnovážných poloh lze s výhodou použít princip virtuální práce $\sum F_i \delta x_i = 0$. V našem případě má tvar

$$0 \cdot \delta x + F_G \delta y = 0\,,$$

neboť na tyčku působí jediná pravá síla – tíhová síla F_G. Abychom rovnici splnili, musí být $\delta y = 0$.



Obr. 1

Polohu tyčky v jamce popíšeme úhlem φ (viz obr. 1). Pokusme se vyjádřit výšku těžiště tyčky y pomocí parametru φ.

Vzdálenost pravého konce tyčky ode dna jamky d_2 vypočítáme pomocí sinové věty pro trojúhelník, který vytváří tyčka a jamka. Podle ní platí

$$\frac{d_2}{\sin\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \varphi\right)} = \frac{l}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad d_2 = l\,\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha - \varphi\right)}{\sin\alpha}\,.$$

Výška pravého konce tyčky je $y_2 = d_2 \cos\frac{1}{2}\alpha$ a pro výšku těžiště tyčky platí $y = y_2 - \frac{1}{2} l \sin\varphi$, celkově tedy máme

$$y = l\left[\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\left(\frac{1}{2}\alpha - \varphi\right)}{\sin\alpha} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right] = l\left[\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha - \varphi\right)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right],$$

což upravíme pomocí vzorce pro kosinus součtu úhlů

$$y = \tfrac{1}{2}l(\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\varphi - \sin\varphi) = \tfrac{1}{2}l\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,. \qquad (8)$$

Zbývá určit φ, abychom splnili $\delta y = 0$, počítejme

$$0 = \delta y = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = -\tfrac{1}{2}l\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,.$$

Jelikož je $\delta\varphi$ libovolné, je poslední rovnice za předpokladu $\alpha \in (0, 180^\circ)$ splněna pro $\varphi = 0$.

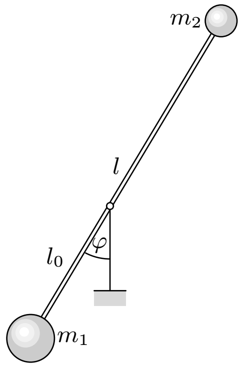
Zjistili jsme, že vodorovná poloha tyčky je rovnovážná. Nesmíme však zapomenout na polohy, kdy tyčka přiléhá ke stěně jamky. Tyto polohy jsou totiž na okraji definičního oboru φ a o jejich rovnovážnosti nám princip virtuální práce nemůže nic říci. Podíváme se znovu na vztah (8) pro výšku těžiště. Funkce $y(\varphi)$ (která je vlastně jen násobek $\cos\varphi$) má maximum pro $\varphi = 0$, v intervalu $(-90^\circ, 0)$ je rostoucí a v intervalu $(0, 90^\circ)$ je klesající. Vodorovná rovnovážná poloha $\varphi = 0$ je tedy labilní (težiště je nejvýše, při vychýlení tyčka „spadne"). V diskutovaných polohách na okraji definičního oboru $\varphi = \pm(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$, kdy je tyčka přilehlá ke stěnám jamky, je naopak těžiště nejníže, jedná se o stabilní polohy.

c) Poslední úlohu vyřešíme jednoduchou aplikací Langrangeova formalismu. Soustava dvou těles dvojzvratného kyvadla má jeden stupeň volnosti, budeme ji parametrizovat úhlem φ (viz obr. 2). Kinetická energie je součet kinetických energií obou závaží

$$T = \tfrac{1}{2}m_1(l_0\dot\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m_2[(l - l_0)\dot\varphi]^2\,.$$

Předpokládejme, že $m_1 l_0 > m_2(l - l_0)$, potom bude závaží m_1 dole a potenciální energie soustavy bude (nulovou hladinu zvolíme na úrovni bodu otáčení)

$$V = -m_1 g l\cos\varphi + m_2 g(l - l_0)\cos\varphi\,.$$



Obr. 2

Langrangeovu funkci $L = T - V$ dosadíme do Lagrangeových rovnic druhého druhu. Předtím si však vypočítáme

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m_1 l_0^2\dot\varphi + m_2(l - l_0)^2\dot\varphi\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = -m_1 g l_0\sin\varphi + m_2 g(l - l_0)\sin\varphi\,,$$

pak dostáváme

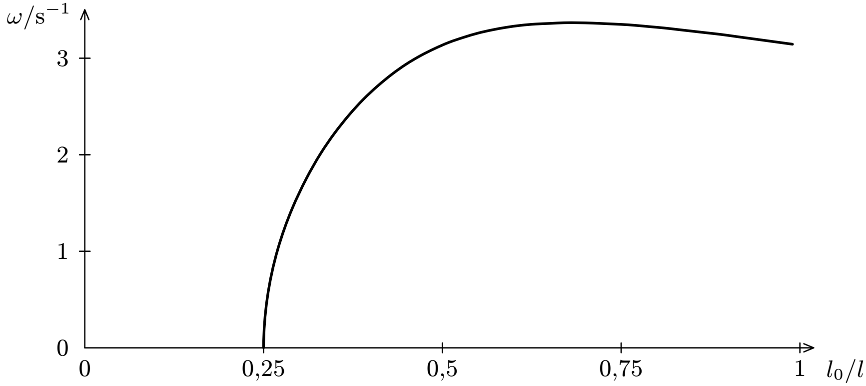
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = [m_1 l_0^2 + m_2(l-l_0)^2]\ddot\varphi + [m_1 g l_0 - m_2 g(l-l_0)]\varphi = 0\,. \tag{9}$$

Hledáme-li úhlovou frekvenci malých kmitů, vystačíme si aproximací $\sin\varphi \approx \varphi$, potom je rovnice (9) rovnicí harmonických kmitů a platí

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g l_0 - m_2 g(l-l_0)}{m_1 l_0^2 + m_2(l-l_0)^2}}\,. \tag{10}$$

Tento vztah přejde k úhlové frekvenci malých kmitů matematického kyvadla pro $m_2 \to 0$ nebo $l_0 \to l$.

Pro zajímavost je závislost (10) vynesena v grafu na obrázku 3 (parametry kyvadla jsou: $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{m}$).



Obr. 3

Je snadné odvodit, že úhlová frekvence kyvadla bude maximální pro

$$l_0 = \sqrt{m_2}\,\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}\,l\,.$$

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz