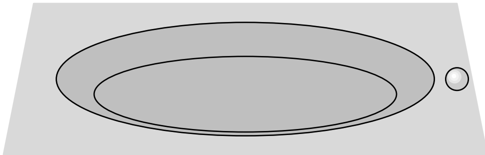
18. ročník, úloha V . 2 ... *pád ze schodů* *(3 body; průměr 2,42; řešilo 26 studentů)*

Malý Karlík si hraje s kuličkou. Při cvrnkání je však neopatrný, kulička se mu odkutálí k nakloněné rovině, kterou doma mají místo schodiště, a začne po ní klouzat dolů. Kulička se pohybuje tak, že vektor její rychlosti $\boldsymbol{v}$ *svírá s horní hranou nakloněné roviny úhel* φ*. Vypočítejte vektor rychlosti* $\boldsymbol{v}'$ *kuličky (tj. jeho velikost a také směr) pod nakloněnou rovinou, jejíž výška je* h*. Tření mezi kuličkou a zemí je malé, proto ho zanedbejte. Předpokládejte, že horní a dolní hrana nakloněné roviny je zaoblená, takže se kulička neodlepí od podlahy.*

Jako bonus můžete vypočítat, jak se změní směr rychlosti kuličky, která proletí válcovou jamkou o poloměru R *a hloubce* h *se zkosenými hranami (viz obr. 1). Délku zkosení můžete vzhledem k poloměru jamky zanedbat.* *Napadlo Matouše Ringela.*



Obr. 1

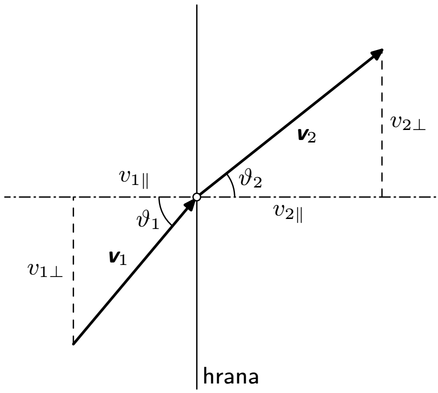
K vyřešení této úlohy nám dopomohou známé mechanické zákony zachování. Zákon zachování energie říká, že pokud měla kulička na začátku kinetickou energii T_1 a na konci kinetickou energii T_2, potom rozdíl těchto energií je roven změně potenciální energie mgh (neboť kulička klesne o h v gravitačním poli). Zákon zachování hybnosti dále tvrdí, že nepůsobí-li během celého procesu v nějakém směru žádná síla, pak je složka hybnosti kuličky v tomto směru stejná na začátku jako na konci. Toto jsou postačující vstupní informace.

Zákon zachování energie doopravdy platí, poněvadž tření je velmi malé (a zanedbáváme jej) a kulička se neodlepuje od země, tedy ani nedopadá, ani se neodráží, v kterýchžto procesech se energie předává podložce a současně se kulička ohřívá. Zákon zachování hybnosti ovšem platí jen v jistém směru. Není jím směr kolmý na hranu schodu, neboť během sjezdu v tomto směru působí urychlující složka gravitační síly. Ve směru rovnoběžném s hranou však během procesu žádná síla nepůsobí, a zachová se tudíž složka hybnosti (i rychlosti, hmotnost kuličky se nemění) v tomto směru. Tímto jsme sestavili dvě rovnice (označení viz obrázek 2)

$$mv_{1\perp} = mv_{2\perp} \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - mgh\,.$$

Z obrázku rovněž vyčteme platnost vztahů $v_{1\perp} = v_1 \sin\vartheta_1$ a $v_{2\perp} = v_2 \sin\vartheta_2$. Z rovnice zákona zachování energie vyjádříme $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$ a rovnici pro siny upravíme na tvar

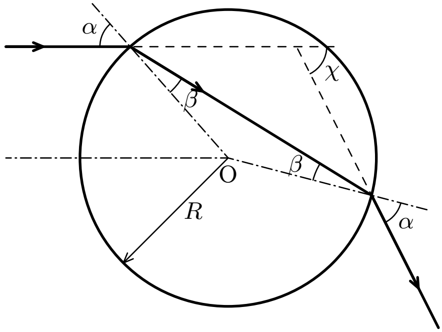
$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_1^2}} = n\,.$$



Obr. 2

Všem znalým optiky se teď musí rozsvítit: odvodili jsme mechanický Snellův zákon. Roli indexu lomu hraje veličina na pravé straně rovnice, která závisí pouze na velikosti vstupní rychlosti a hloubce jámy.

Když už nyní víme, že kulička se na rozhraní láme jako světelný paprsek, můžeme zkusit „zobrazit“ kuličku čočkou – důlkem. Situace je zachycena na obrázku 3.



Obr. 3

Na prvním i druhém rozhraní použijeme odvozený zákon lomu (stejný jako v optice!), tedy položíme $\sin\alpha = n\sin\beta$, a uvědomíme si, že pro celkovou změnu směru χ platí $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Teď stačí jen dosadit za $\beta = \arcsin(\sin\alpha/n)$ a máme hotovo. Platí

$$\chi = 2\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right).$$

Zájemci mohou vyřešit ještě zobrazení svazku kuliček tenkou jamkou ve tvaru čočky. Neměli bychom zapomenout prodiskutovat vliv okrajů. V tomto případě totiž nebude zákon lomu platit přesně, nýbrž pouze tehdy, budou-li rozměry zkosení hran zanedbatelné proti poloměru důlku – pouze tehdy okraj lokálně vypadá jako rovná hrana, pro kterou odvozený zákon lomu platí.

Ty z vás, kteří poctivě četli seriál anebo jinde slyšeli o lagrangiánech či akcích, nalezené vzorečky jistě nepřekvapily. Mechanika se totiž dá odvodit z jistého variačního principu podobného Fermatovu principu geometrické optiky. Naopak geometrická optika se dá přepsat do parciálních diferenciálních rovnic podobných těm mechanickým. Tato analogie vedla zakladatele kvantové mechaniky k zavedení vlnově-částicového dualismu.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.