18. ročník, úloha IV . 4 ... Mössbauerův jev *(4 body; průměr 3,45; řešilo 20 studentů)*

Frekvence fotonu vyzářeného jádrem radioaktivního železa není vždy stejná, ale při rozpadech různých jader se nepatrně liší (to platí i pro jiná jádra). Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnota energie fotonu v klidové soustavě jádra železa leží náhodně v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$, *kde* $E_0 = 14{,}4\,\mathrm{keV}$ *(keV = kiloelektronvolt),* $\Delta E \approx 10^{-8}\,\mathrm{eV}$ $(1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})$.

a) *Vyzáří-li volný nehybný atom železa foton, musí mít tento atom podle zákona zachování hybnosti opačnou hybnost než vyzářený foton. Vypočítejte kinetickou energii takového atomu a porovnejte ji s veličinou* ΔE.

b) *Takzvaný Mössbauerův jev spočívá v tom, že je-li foton vyzářen atomem železa vázaným v krystalu, může se hybnost „zpětného rázu" předat celému krystalu. Vypočítejte kinetickou energii krystalu (posun energie fotonu) v tomto případě za předpokladu, že krystal je složen z řádově* 10^{23} *atomů.*

Stejně jako emise fotonu může probíhat i jeho absorpce. Foton však může být absorbován jen tehdy, když jeho energie v klidové soustavě jádra leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$.

c) *Rozhodněte, zda může nehybný atom železa absorbovat foton vyzářený jiným nehybným atomem.*

d) *Vypočítejte, jak rychle se vůči sobě musí pohybovat dva kusy železa, aby už první kus nemohl kvůli Dopplerovu jevu absorbovat fotony vyzářené druhým kusem. Dopplerovým jevem myslíme to, že frekvence záření* f, *kterou vyzařuje zdroj přibližující se rychlostí* v, *se v naší soustavě změní na*

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f\,.$$

Předpokládejte, že při emisi i absorpci se uplatňuje výše zmíněný Mössbauerův jev.

Potřebné konstanty nalezněte v tabulkách. *Úlohu vymyslel Pavel Augustinský.*

Před vlastním řešením této úlohy bude dobré vyjasnit si některé zvláštnosti ve světě atomů. Prozkoumejme nejprve proces vyzařování. Jako cokoliv ve světě atomů je i vyzařování popsáno kvantovou mechanikou a vypočítat jej není jednoduché. Nicméně nám stačí vědět, že atom, který má energii větší než minimální, může přebytečnou energii vyzářit ve formě fotonu – kvanta světla. Ovšem foton nemusí reprezentovat pouze světlo. Záleží na tom, jakou si nese energii. Takže fotony s relativně malou energií, které se vyzařují při přechodech v elektronovém obalu, pro nás znamenají mikrovlny, světlo, Röntgenovo záření, a dokonce i záření γ. Jádro vyzařuje zejména vysokoenergetické γ fotony. Jakou energii bude mít vzniklý foton, když jádro přejde z jedné hladiny na druhou? Zdálo by se, že to bude obyčejný rozdíl energií těchto hladin. Ovšem není tomu tak, a to hned ze dvou důvodů.

Za prvé, má-li dojít k přechodu mezi hladinami, jádro nemůže být přesně a pouze ve stavu odpovídajícímu vyšší hladině. Tento stav je totiž tzv. stacionární, což znamená, že když už jednou jádro je v takovém stavu, zůstane v něm navždy (samozřejmě když do něj „nestrčíme"). Jistě jste už něco slyšeli o superpozici (kombinování) stavů: jádro před přechodem je dobrým příkladem oné známé Schrödingerovy kočky; jádro je spíše na vyšší hladině, ale je v něm již namícháno něco z nižší hladiny. Ježto není jasné, kolik přesně je tam vyššího stavu a kolik nižšího, není ani přesně dáno, jakou energii bude mít vyzářený foton, neboť energie stavu je také směs energií oněch dvou hladin. My samozřejmě nevíme, v jakém stavu jsou jádra v kusu železa, se kterým měříme, ale můžeme měřit s mnoha jádry a pak výsledky zprůměrovat. Takto získáme křivku udávající závislost pravděpodobnosti vyzáření fotonu na energii. Ve skutečnosti vypadá jako např. Sněžka s vrcholem umístěným nad energií, odpovídající rozdílu energií hladin; v naší úloze jsme si situaci zjednodušili.

Druhý důvod, proč energie nebude prostě rozdíl energií hladin, je zpětný ráz. Při procesu vyzařování se musí zachovávat energie a hybnost. Hybnost atomu po vyzáření je opačná, než hybnost vyzářeného fotonu, byl-li atom původně v klidu. Do bilance energie nám vstupují změna potenciální energie atomu, energie fotonu a kinetická energie atomu. Nicméně změna potenciání energie atomu je prostě rozdíl energií hladin, čili z rovnice zákona zachování energie

$$\Delta \text{energie atomu} = \text{kinetická energie atomu} + \text{energie fotonu}$$

seznáme, že energie vyzařovaných fotonů bude menší o energii zpětného rázu. Jak známo, $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ a $p = mv$, odkud $2mE_{\mathrm{kin}} = p^2$, kde m je hmotnost tělesa, jež je vystaveno rázu, v našem případě atomu. Hybnost fotonu souvisí s energií jako $E_{\mathrm{foton}} = pc$. Poslední vzorec plyne z teorie relativity. Velikosti hybností se musí rovnat, takže dostáváme rovnici

$$E_0 = \frac{E_{\mathrm{foton}}^2}{2mc^2} + E_{\mathrm{foton}}\,.$$

To je obyčejná kvadratická rovnice, my ji ale budeme řešit pouze přibližně, což nám usnadní práci. Kdybychom neuvažovali zpětný ráz, bude $E_{\mathrm{foton}} = E_0$. Zpětný ráz způsobí malou změnu této energie, nechť je tato $E_{\mathrm{foton}} = E_0 - \delta$, kde $\delta \ll \Delta$ je ona malá změna. Když toto řešení dosadíme do rovnice, dostaneme

$$0 = \frac{E_0^2 + \delta^2 + 2\delta E_0}{2mc^2}\,,$$

kde můžeme vynechat člen δ^2, neboť je podle předpokladu mnohem menší než ostatní členy. Takto najdeme

$$\delta \approx \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{E_0 + mc^2}\,,$$

čili

$$E_{\mathrm{foton}} \approx E_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{E_0}{E_0 + mc^2}\right).$$

Mol železa váží asi 56 g a nachází se v něm zhruba $6 \cdot 10^{23}$ atomů, pročež hmotnost $m \approx 9 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $E_0 = 14{,}4\,\mathrm{keV} = 2{,}3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$ a $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Z toho nakonec pro relativní změnu energie dostaneme hodnotu $1{,}4 \cdot 10^{-7}$, a tedy pro změnu energie $2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$, což je sice málo v absolutní hodnotě, ale hodně ve srovnání s rozptylem energií fotonů způsobeným výše popsaným mechanismem.

Pojem Mössbauerův jev je označení pro situaci, kdy zpětný ráz absorbuje nikoliv jediný atom (jako v případě výše), nýbrž celý krystal najednou. Nebudeme diskutovat otázku podstaty tohoto jevu, neboť je to netriviální problém kvantové teorie pevných látek. Pro řešení naší úlohy nám postačí uvážit, že můžeme zachovat předchozí postup, avšak s m rovnajícím se nikoliv hmotnosti atomu, ale hmotnosti krystalu $m' = Nm$, kde $N \approx 1 \cdot 10^{23}$ je počet atomů v krystalu. Takto dostaneme pro hodnotu posunu energie odhad $1 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{eV}$.

Máme-li vyzařující volný atom železa a absorbující volný atom železa, nemůže dojít k absorbci na dané energii; energie fotonů vyzařovaných i absorbovaných se nacházejí v okolí o pološířce $\Delta E \approx 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV}$ od základní energie E_0, avšak posun energií v důsledku zpětného rázu je řádově $1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$ (to jsme před chvilkou spočetli), okolí se tedy nebudou překrývat a to znemožní absorbci. Situace se změní s nástupem Mössbauerova jevu. Posun energií je pak pouze $\approx 1 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{eV} \ll 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV}$; posuv proto můžeme s klidným svědomím zanedbat a k absorbci dochází.

Budeme-li nyní jedním kusem železa pohybovat, energie fotonu v laboratorní soustavě (tj.klidové soustavě druhého kusu) se změní, tentokráte v důsledku Dopplerova jevu. Díky malosti rychlosti můžeme použít jeho nejjednodušší verzi bez nějakých relativistických korekcí, tedy verzi ze zadání $f' = (1 + v/c)f$, přičemž v je kladné, když se železa přibližují. Energie fotonu je svázána s frekvencí Planckovým vztahem $E = hf$ ($h \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$ je Planckova konstanta), čili energie vyzářeného fotonu v laboratorní soustavě bude $E' = E(1+v/c)$. K absorbci fotonu stojícím kusem železa bude docházet, když se tato energie bude nacházet v ΔE okolí energie E_0, jinými slovy o $E_0 v/c$ posunutá vyzařovací charakteristika se musí překrývat s neposunutou absorbční (tj. vyzařovací) charakteristikou. Mezní případ odpovídá přibližování zdroje a nejmenší možné energii vyzářeného fotonu (příp. vzdalování a největší možné energii), tj.

$$E_0 + \Delta E = (E_0 - \Delta E)\left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx E_0 - \Delta E + E_0 \frac{v}{c},$$

odkud $v \approx c \cdot 2\Delta E/E_0 \approx 0{,}4\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$. Bude-li se zářící železo pohybovat (v prvním přiblížení je jedno kterým směrem) rychlostí větší než právě spočtenou, stojící kus železa nebude jím vyzářené fotony schopen absorbovat.

Objev tohoto jevu dal experimentátorům možnost zkoumat velice malé posuny frekvencí, tak malé, že se pomocí nich dá zkoumat například struktura spektrálních čar (tj. výše používaných vyzařovacích charakteristik) a jiné jemné efekty v pevných látkách. Dále se dá využít pro měření malých rychlostí, což se hodí např. při přibližování dvou kosmických lodí ve vesmíru. Pomocí něho se rovněž povedlo naměřit gravitační rudý posuv, jejž předpovídá obecná teorie relativity.

Železo se k měření používá proto, poněvadž má jednu z nejužších a přitom nejvydatnějších spektrálních čar, což zlepšuje rozlišení měření. Původně se používala jádra osmia či iridia. Experimentální uspořádání může vypadat takto: zářič se pohybuje nějakou rychlostí, záření prochází skrz nepohybující se kus železa a za ním detektorem měříme intenzitu. Stojící železo bude při různých rychlostech různě absorbovat, absorbovat bude právě když se dostatečně překrývají spektrální čáry pohybujícího se a stojícího železa. Takto bychom například zjistili, že pokud má v přízemí se nacházející kus železa absorbovat fotony vyzařované železem v dvacátém patře, musí se toto přibližovat jistou rychlostí, kterou bychom změřili a odtud určili velikost rudého posuvu.

Za svůj objev byl německý fyzik Rudolf Mössbauer z Mnichova v roce 1961 oceněn Nobelovou cenou.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.