18. ročník, úloha III . S ... *Lagrangeovy rovnice 1. druhu* *(5 bodů; průměr 3,92; řešilo 12 studentů)*

a) Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákně. Zaveďte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.

b) Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,, \qquad (1)$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

c) Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepí od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepí v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)

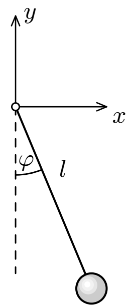
Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

a) Souřadnicovou soustavu zavedeme následujícím způsobem (viz obr. 1). Počátek zvolíme v místě závěsu, osu x orientujeme vodorovně doprava, osu y svisle vzhůru.

Hmotný bod se zřejmě pohybuje po kružnici se středem v počátku soustavy souřadnicové o poloměru l, kde l je délka závěsu. Stačí nám tedy napsat odpovídající rovnici kružnice

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0\,,$$

což je vazebná podmínka hmotného bodu.



Obr. 1

b) Přistupme nyní k sestavení Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Na hmotný bod působí kromě vazebné síly ještě síla tíhová $\boldsymbol{F}_G = (0, -mg)$. Dle seriálu má pohybová rovnice pro x-ovou souřadnici tvar

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x\,,$$

obdobně pro y-ovou souřadnici

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2\lambda y\,.$$

Abychom vyloučili neznámou funkci λ, první rovnici vynásobíme y a odečteme od ní x-násobek druhé,

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgx\,. \qquad (2)$$

Tuto rovnici nyní přepíšeme pomocí parametrů l a φ, abychom dostali rovnici (1).

Vztah mezi x, y a výchylkou z rovnovážné polohy φ je (viz obr. 1)

$$x = l\sin\varphi\,, \quad y = -l\cos\varphi\,, \qquad (3)$$

tyto vztahy dvakrát derivujeme podle času

$$\ddot{x} = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\ddot{\varphi}\,, \quad \ddot{y} = l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\,\ddot{\varphi}\,. \qquad (4)$$

Dosaďme nyní z (3) a (4) do rovnice (2), dostáváme

$$l^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - l^2\cos^2\varphi\,\ddot\varphi - l^2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi^2 - l^2\sin^2\varphi\,\ddot\varphi = gl\sin\varphi\,,$$

$$-l\ddot\varphi = g\sin\varphi\,,$$

což je rovnice matematického kyvadla ze zadání.

c) Poloměr polokoule označme R a souřadnicovou soustavu zvolme stejnou jako v části a). Jelikož tělísko klouže po polokouli, vazebná podmínka bude $f = x^2+y^2-R^2 = 0$. Lagrangeovy rovnice 1. druhu budou shodné s těmi, které jsme odvodili v části b),

$$m\ddot x = 2\lambda x\,,\quad m\ddot y = -mg + 2\lambda y\,.$$

Teď provedeme malý trik. První rovnici vynásobíme x, druhou y a sečteme je

$$m(\ddot x x + \ddot y y) = -mgy + 2\lambda(x^2+y^2)\,. \tag{5}$$

Dvakrát zderivujeme vazebnou podmínku

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 2x\dot x + 2y\dot y = 0\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = 2\dot x^2 + 2\dot y^2 + 2x\ddot x + 2y\ddot y = 0\,. \tag{6}$$

Nyní si stačí uvědomit, že $R^2 = x^2+y^2$ a pro rychlost platí $v^2 = \dot x^2+\dot y^2$, potom z rovnic (5) a (6) dostaneme

$$-mv^2 = -mgy + 2\lambda R^2\,.$$

Abychom si ušetřili integrování pohybových rovnic, použijeme rovnou zákon zachování energie $mv^2/2 + mgy = mgR$, který spolu s poslední rovnicí dává

$$2mg(y-R) = -mgy + 2\lambda R^2 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{2}{3}R + \frac{2\lambda R^2}{3mg}\,.$$

Nás zajímá poloha tělíska v okamžiku, kdy $\lambda = 0$ (právě tehdy se odlepí od polokoule). Výška tělesa v tomto okamžiku bude $y = 2R/3$.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.