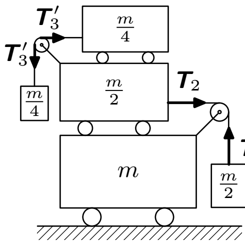
18. ročník, úloha III . P ... věž z vozíčků *(5 bodů; průměr 1,87; řešilo 23 studentů)*

Určete zrychlení prvního a stého vozíčku (počítáno od země) na obrázku 1. Vozíčků je nekonečně mnoho, na obrázku jsou zakresleny jen první čtyři. Spodní vozíček má hmotnost m, další vozíček, který po něm jezdí, a závaží, se kterým je spojen, má hmotnost $m/2$. Podobně další vozíček a závaží má hmotnost $m/4$ atd. Předpokládejte, že závaží jsou připevněná k vozíčkům, tj. že se ve svislém směru neodchylují. Tření mezi jednotlivými vozíčky zanedbejte.

Úlohu navrhl Honza Houštěk.

Pro každý vozíček ze soustavy (mimo první) bude platit stejná pohybová rovnice, tedy až na indexy, které nám říkají, o který vozíček, resp. zrychlení jde. Všechna zrychlení orientujeme tak, že jejich souřadnice a_n budou kladné.



Obr. 1

Zabývejme se nyní tím, jaké síly působí na n-tý vozíček o hmotnosti $m_n = m/2^{n-1}$ (vystupuje zde $n-1$, neboť chceme, aby první vozíček měl hmotnost dle zadání rovnu m). Souřadnici zrychlení tohoto vozíčku označme a_n. S tímto vozíčkem se zároveň pohybuje i závaží o hmotnosti $m_{n+1} = m/2^n$. Dále na n-tý vozíček působí dvě síly, tahová síla o velikosti T_n a síla o velikosti T'_{n+1}, která se přenáší přes kladku vozíčku. $\boldsymbol{T}'_{n+1}$ je reakcí na $\boldsymbol{T}_{n+1}$ a je stejně velká . Nadále budeme všude psát jen T_{n+1} namísto T'_{n+1}. Pohybovou rovnici můžeme prozatím zapsat takto

$$\left(\frac{m}{2^{n-1}} + \frac{m}{2^n}\right) a_n = T_n + T_{n+1}\,. \tag{1}$$

Nyní potřebujeme určit velikost tahové síly T_n. Na n-té těleso zavěšené na laně působí jen tíhová síla o velikosti $m_n g$. Toto těleso se však navíc pohybuje se zrychlením $a_n + a_{n-1}$ dolů, kde zrychlení a_n je způsobeno vazbou lana a zrychlení a_{n-1} tím faktem, že vozíček držící kladku s ní ujíždí tímto zrychlením opačným směrem pryč. Tím pádem platí tato pohybová rovnice pro zavěšené těleso

$$\frac{m}{2^{n-1}}(a_n + a_{n-1}) = \frac{m}{2^{n-1}}\, g - T_n$$

a odtud pro T_n, resp. T_{n+1} platí

$$T_n = \frac{m}{2^{n-1}}(g - a_n - a_{n-1})\,, \quad T_{n+1} = \frac{m}{2^n}(g - a_{n+1} - a_n)\,.$$

Tyto vztahy dosadíme do (1) a po úpravách dostáváme rekurentní vzorec

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 3g\,, \quad \forall n \geq 2\,. \tag{2}$$

Nyní si všimneme, že tuto rovnici řeší konstantní posloupnost a_n ($a_n = a_{n+1}$, $\forall n \geq 2$), pak dosazením do (2) zjistíme, že pro všechna n je $a_n = g/3$. Toto řešení není ale jediné. Řešením je také $g/3 + h$, kde h je řešení rovnice s nulovou pravou stranou

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 0\,. \tag{3}$$

O tom se můžete sami přesvědčit dosazením. Abychom zjistili všechna řešení rovnice (3), naučíme se ji řešit. Z toho důvodu na chvíli odbočíme od řešení fyzikálního problému a ukážeme si postup řešení.

Rovnici (3) nazýváme diferenční rovnicí. Její řešení najdeme tak, že budeme předpokládat řešení rovnice ve tvaru x^n, $x \neq 0$. To znamená, že všude namísto a_n napíšeme x^n, obdobně místo a_{n+1} napíšeme x^{n+1} atd. Mějme obecnou rovnici

$$c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0\,.$$

Tu převedeme na

$$c_r x^{n+r} + \dots + c_1 x^{n+1} + c_0 x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_r x^r + \dots + c_1 x^1 + c_0 = 0\,,$$

toto je rovnice r-tého stupně. Pokud najdeme r *různých*[1] kořenů $x_1, \dots, x_r$, pro řešení diferenční rovnice platí

$$a_n = k_1 x_1^n + \dots + k_r x_r^n\,,$$

kde $k_1, \dots, k_n$ jsou neznámé koeficienty, které můžeme určit z počátečních podmínek. Zkuste si vypočítat, jak vypadá explicitní vzorec pro Fibonacciho posloupnost, pro kterou platí $a_0 = 0, a_1 = 1$ a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Tento postup aplikujme na rovnici (3). Dostaneme rovnici

$$x^{n+1} + 6x^n + 2x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 2 = 0\,.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení

$$x_1 = -3 - \sqrt{7}\,, \quad x_2 = -3 + \sqrt{7}\,.$$

Rovnice (3) má pak řešení

$$a_n = k_1(-3 - \sqrt{7})^n + k_2(-3 + \sqrt{7})^n\,,$$

kde k_1, k_2 jsou neznámé koeficienty.

Nyní se vraťme opět k fyzice. Jak jsme již řekli, řešení rovnice (2) je rovno $g/3 + h$, kde h je řešení (3), a tedy zrychlení n-tého vozíčku vypočítáme

$$a_n = \frac{g}{3} + k_1(-3 - \sqrt{7})^n + k_2(-3 + \sqrt{7})^n\,,$$

kde k_1, k_2 musíme určit. Je zřejmé, že k_1 musí být rovno nule, neboť $|-3 - \sqrt{7}| > 1$, a pokud by bylo k_1 nenulové pro n rostoucí do nekonečna, zrychlení by rostlo nade všechny meze. To ale není možné, protože nejvyšší možné zrychlení v tíhovém poli je rovno g. O koeficientu k_2 neumíme zatím nic říci. Označme $\lambda = -3 + \sqrt{7}$, předchozí rovnice se potom přepíše na

$$a_n = \frac{g}{3} + k_2 \lambda^n \quad \forall n \geq 2\,. \tag{4}$$

Abychom určili, čemu je roven k_2, potřebujeme ještě jednu rovnici. Touto pohybovou rovnicí bude rovnice pro zrychlení prvního vozíčku. Urychluje jej jen síla přenášená od kladky. Pohybová rovnice pro první vozíček pak vypadá takto

$$\frac{3}{2} m a_1 = \frac{1}{2} m(g - a_1 - a_2)\,.$$

[1] pro vícenásobné kořeny toto neplatí

Dosazením za $n = 2$ v rovnici (4) dostáváme

$$a_2 = \frac{g}{3} + k_2\lambda^2 \,.$$

Tuto rovnici dosadíme do pohybové rovnice pro první vozíček, abychom zjistili, čemu je rovno jeho zrychlení. Po krátkých úpravách dostaneme

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{1}{4}\,k_2\lambda^2 \,.$$

Sepišme si pro přehlednost rovnice, které použijeme pro výpočet k_2. Poslední rovnice je rovnice (2) pro $n = 2$.

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{1}{4}\,k_2\lambda^2 \,, \quad a_2 = \frac{g}{3} + k_2\lambda^2 \,, \quad a_3 = \frac{g}{3} + k_2\lambda^3 \,,$$
$$a_3 + 6a_2 + 2a_1 = 3g \,.$$

Nyní dosadíme za a_1, a_2 a a_3 do poslední rovnice, z toho si vyjádříme k_2

$$\frac{g}{3} + k_2\lambda^3 + 2g + 6k_2\lambda^2 + \frac{g}{3} - \frac{1}{2}\,k_2\lambda^2 = 3g \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{g}{3\lambda^2(5{,}5 + \lambda)} \,.$$

Přímým dosazením do rovnice pro první vozíček získáváme

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{g}{12(5{,}5 + \lambda)} \doteq 0{,}15g \,,$$

pro n-tý vozíček platí

$$a_n = \frac{g}{3}\left(1 + \frac{\lambda^{n-2}}{5{,}5 + \lambda}\right) \,.$$

Snadno si všimneme, že pro n jdoucí do nekonečna konverguje a_n ke $g/3$, protože $|\lambda| < 1$. A konkrétně pro stý vozíček se velikost zrychlení liší od $g/3$ až na 45. desetinném místě.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.