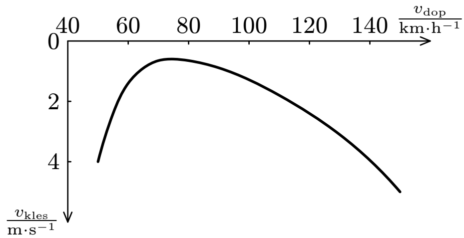
18. ročník, úloha III . 4 ... *s větroněm přes kanál* *(4 body; průměr 2,33; řešilo 33 studentů)*

Jeden známý letec se rozhodl ve větroni přeletět kanál La Manche. V Calais se nechal vyvléci do výšky $h = 3$ km a z této výšky se přímým klouzavým letem vypravil do Anglie. Jako dobrý pilot ví, kterak při ustáleném letu vypadá závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} (viz graf na obr. 1). Poraďte mu, jak rychle má letět, aby doletěl co nejdál.

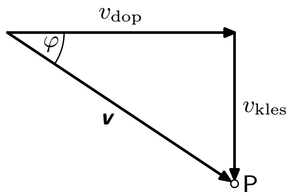
Když je ve třech čtvrtinách cesty do Anglie, začne od ostrovů fučet silný vítr o rychlosti $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Rozhodněte, jak rychle má letět nyní, aby se dostal co nejdál. Jaká by musela být rychlost větru, aby mu znemožnila přistát na pevnině, případně aby mu umožnila návrat do Francie?

Úlohu vymyslel pilot Matouš Ringel.



Obr. 1

Řešení této úlohy je založeno na pozorování, jež mnoho z vás skutečně zpozorovalo, a sice že bodu $\mathsf{P} = (v_{\mathrm{dop}}, v_{\mathrm{kles}})$ křivky odpovídá klesací úhel φ, jenž splňuje rovnici $\operatorname{tg}\varphi = v_{\mathrm{kles}}/v_{\mathrm{dop}}$. Chceme-li z dané výšky doletět co nejdál, je zřejmě nutné klesat pod co možná nejmenším úhlem. Jak si lze snadno uvědomit, vedeme-li přímku z počátku souřadnic (toho skutečného počátku, tj. $(0, 0)$, na obrázku není), pak úhel, jenž svírá s osou x, je roven právě φ (pohleďte na obrázek 2).



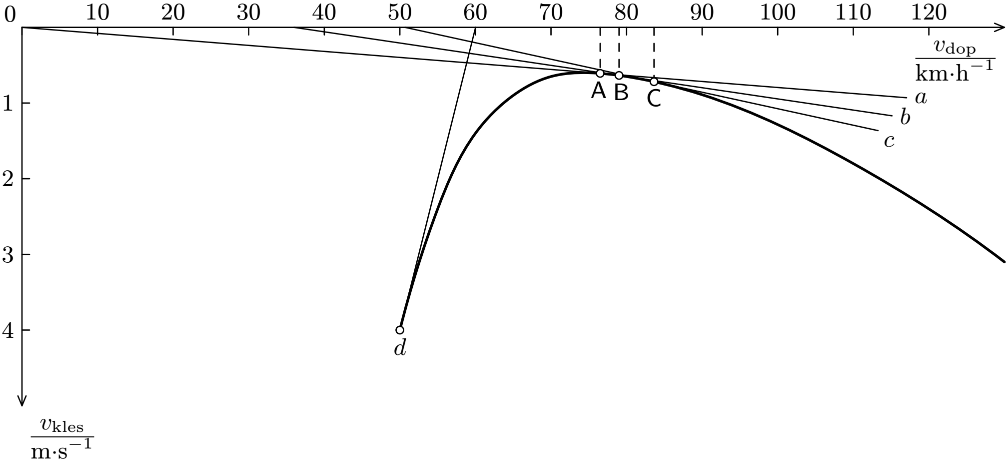
Obr. 2

Proto chceme najít přímku s co možná nejmenším sklonem, ovšem protínající křivku. Vezmeme nějakou přímku procházející počátkem a budeme ji otáčet. Nejprve bude protínat křivku ve dvou bodech, pak v jednom a nakonec vůbec[1]. Správná volba je tudíž přímka protínající křivku v jednom bodě – tečna. Na následujícím obrázku se jedná o přímku a.

Měli jsme za úkol zjistit, jakou rychlostí v takovém případě poletíme. Jednoduše odečteme x-ovou souřadnici průsečíku. Najdeme $v \approx v_{\mathrm{dop}} \approx 76\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ (zanedbáváme malý úhel klesání). V dalším budeme potřebovat znát i tangens úhlu klesání. Ten odměříme nejlépe tak, že zvolíme bod na příslušné přímce, odečteme jeho souřadnice, a vypočítáme $\operatorname{tg}\varphi$ podle vzorce výše. Nalezneme $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}0273$.

Rozmysleme si, co se stane, když začne foukat protivítr. Naše křivka udává do souvislosti složky rychlosti vůči proudícímu vzduchu. Za bezvětří je křivka platná i vůči zemi, avšak při protivětru ji musíme upravit. Zřejmě nezmění svůj tvar, celá změna se redukuje na posunutí počátku souřadnic ve směru v_{dop} o rychlost větru, neboť letadlo letící stejnou rychlostí vůči vzduchu letí pomaleji vůči zemi. Nyní provedeme úplně stejnou proceduru jako v předchozím bodě, akorát tečnu povedeme z nového počátku souřadnic. Na obrázku tečně odpovídá přímka b. Nejvýhodnější rychlost odečteme rovnu asi $79\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

[1] Toto obecně neplatí. Je nutné, aby se křivka „zatáčela“ pořád na stejnou stranu.



Obr. 3

Nyní vypočítáme, v jaké výšce se bude větroň nalézat ve třech čtvrtinách cesty do Anglie. Na mapě můžeme odměřit šířku Kanálu, jenž je okolo Calais široký asi 40 km. Odtud výška větroně 10 km od pobřeží Anglie bude $h' = 3\,\mathrm{km} - \mathrm{tg}\,\varphi \cdot 30\,\mathrm{km} \approx 2{,}2\,\mathrm{km}$. Má-li vítr zabránit větroni dosáhnout břehu, musí fučet tak rychle, aby úhel klesání letadla byl větší než úhel nutný k dosažení břehu. Tento označíme α a platí pro něj vztah $\mathrm{tg}\,\alpha = h'/10\,\mathrm{km}$. Odtud $\mathrm{tg}\,\alpha \approx 0{,}22$. Jak jsme již podotkli, úhlu klesání odpovídá úhel přímky vedené počátkem souřadnic a bodem křivky, ve kterém se letadlo nachází. Nejmenší úhel odpovídá tečně. Proto mezní rychlost větru bude taková, že tečna ke křivce vedená z nového počátku souřadnic bude mít právě nalezenou směrnici. Jelikož směrnici známe, musíme najít bod na křivce, ve kterém má tečna tutéž směrnici. To se snadno zkonstruuje podobně, jako kreslíme rovnoběžky pomocí dvou pravítek. Na obrázku situaci vyjadřuje přímka c. Rychlost větru je x-ová souřadnice průsečíku tečny s osou x, tedy $\approx 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Můžete si snadno ověřit, že se větroň může vrátit do Francie při libovolném větru, jinými slovy pilot nebyl zas až takový dobrodruh.

Jako bonus zjistěme, kdy větroň může ve vzduchu couvat. Po krátkém přemýšlení si uvědomíme, že větroň musí letět co nejpomaleji a protivítr musí být co nejrychlejší. Odtud už snadno odvodíme, že přímka d na obrázku, tedy tečna ke křivce v nejkrajnějším bodě, řeší úlohu.

Křivka v zadání byla dosti plochá – odtud plyne jen malý rozdíl v optimálních rychlostech. I když se od křivek výkonných větroňů příliš neliší, přeci jen jsem situaci podcenil, což vám ztížilo (znepřesnilo) konstrukci. Omlouvám se tímto všem snaživcům, zejména pak *Petru Perešínimu*, jenž do řešení zapojil veškerou v okolí dostupnou výpočetní techniku a vyrobil s její pomocí pěkné řešení.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.