

18. ročník, úloha II. E ... není hmotnost jako hmotnost (8 bodů; průměr 4,81; řešilo 31 studentů)

Experimentálně ověřte rovnost setrvačné (té, která vystupuje ve druhém Newtonově pohybovém zákonu) a gravitační hmotnosti (té, která vystupuje v Newtonově gravitačním zákonu).

Vymyslel Jarda Trnka na přednášce z relativity.

Teorie

Před měřením si musíme uvědomit, kde gravitační a setrvačná hmotnost vystupují. Například u siloměru se tíhová síla přenáší na výchylku pružiny, takže měříme vlastně hmotnost setrvačnou. Samotná tíhová síla je také tvořena dvěma složkami – kromě gravitační síly na těleso působí rovněž odstředivá síla (Země se otáčí), určená hmotnost je tedy součtem gravitační a setrvačné hmotnosti. Orientačním výpočtem se ale můžeme přesvědčit, že setrvačná složka netvoří více než 0,3 % výsledné síly.

Gravitační hmotnost lze určit obyčejným vážením, musíme si však uvědomit, jak přesně použité váhy pracují. Další možností je volný pád, omezuje nás ovšem odpor vzduchu, který do měření vkládá velkou chybu. Setrvačnou hmotnost můžeme určit pomocí kyvadel nebo z dob kmitání těles na pružině. Ve druhém případě je však obtížné použít za výchozí údaj tuhost pružiny, ta byla pravděpodobně určena obdobným experimentem, lépe bylo provést druhé měření pro pružinu tvořenou dvěma stejnými pružinami. Poměr gravitační a setrvačné hmotnosti můžeme také určit z úhlu, o který se od svislého směru odchýlí rotující kulička na provázku. V tomto případě je vodorovná složka výslednice tvořena odstředivou silou (podílí se na ní setrvačná hmotnost) a svislá silou tíhovou, u které můžeme s velkou přesností předpokládat, že je tvořena gravitační hmotností.

S velkou přesností byl poměr gravitační a setrvačné hmotnosti určen pomocí Cavendishových vah. Na tyč zavěšenou na tenkém vlákne jsou připevněna dvě závaží, do jejichž blízkosti umístíme dvě těžké koule. Gravitační síla, kterou tyto koule na menší závaží působí, vyvolá kmitání tyče kolem rovnovážné polohy. Jeho periodu pak můžeme určit tím, že sledujeme odraz světelného paprsku od zrcátka připevněného k tyči.

V domácích podmínkách je pravděpodobně nejjednodušší provést měření doby kmitů matematického kyvadla, proto jsme si tento způsob vybrali také my.

Vzdálenost místa na povrchu Země od jejího středu určíme podle vzorce

$$R = R_{\text{rov}} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + (R_{\text{pol}}/R_{\text{rov}})^4 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (R_{\text{pol}}/R_{\text{rov}})^2 \sin^2 \varphi}},$$

kde R_{rov} je rovníkový a R_{pol} poledníkový poloměr Země. Uvědomme si ale, že gravitační působení rotačního elipsoidu nemůžeme nahradit působením hmotného bodu v jeho středu. Chybu vzdálenosti R určené z předchozího vztahu proto odhadneme na 5 km, přičemž do ní zahrneme i tyto odlišnosti. Pro Prahu ($\varphi = 50^\circ 07'$) vychází

$$R = (6366 \pm 5) \text{ km}.$$

Tíhovou sílu působící na povrchu Země můžeme vyjádřit jako součet gravitační a odstředivé síly. Ve vztahu pro gravitační sílu vystupuje gravitační hmotnost μ a ve vztahu pro odstředivou sílu setrvačná hmotnost m . Výslednici dáme do rovnosti s dostředivou silou.

$$\frac{\varkappa \mu M_Z}{R^2} - m \Omega^2 R \cos \varphi = m \omega^2 l,$$

kde l je délka kyvadla, ω úhlová frekvence kmitání kyvadla a Ω úhlová frekvence otáčení Země. Odtud pro poměr gravitační a setrvačné hmotnosti plyne

$$x = \frac{\mu}{m} = \frac{\Omega^2 R \cos \varphi + \omega^2 l}{\varkappa M_Z / R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{\varkappa M_Z} \left(\frac{R \cos \varphi}{T_Z^2} + \frac{l}{T^2} \right), \quad (1)$$

kde T_Z je doba otočení Země a T perioda matematického kyvadla.

Výsledky měření

Matematické kyvadlo jsme si reprezentovali kuličkou zavěšenou na niti. Za délku kyvadla budeme považovat vzdálenost závěsu od středu koule. Tu vyjádříme jako součet délky niti L , délky h háčku, na kterém je koule zavěšena, a poloměru koule r . Poloměr koule i délku háčku jsme určili posuvným měřítkem, délku niti pásovým měřidlem. Chybu délky niti odhadneme na 0,4 cm.

$$h = (0,69 \pm 0,01) \text{ cm}, \quad r = (1,17 \pm 0,01) \text{ cm}, \quad L = (99,3 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Při určování chyby celkové délky matematického kyvadla můžeme chyby poloměru koule i délky háčku zanedbat.

$$l = (101,2 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Dobu deseti kmitů kyvadla jsme určovali pomocí čítače. Ten vždy zaznamenává dobu, kdy kyvadlo protlo dráhu světelného paprsku, čímž výrazně zvyšuje přesnost měření (odstraňuje reakční dobu experimentátora). Výchylku kyvadla volíme maximálně 3° .

č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10T$ [s]	20,1838	20,1875	20,1857	20,1834	20,1806	20,1829	20,1857	20,1866	20,1859	20,1803
T [s]	2,01838	2,01875	2,01857	2,01834	2,01806	2,01829	2,01857	2,01866	2,01859	2,01803

Aritmetický průměr je 2,01842 s. Chybu měření odhadneme vzhledem k rozptylu naměřených hodnot na 0,0003 s, neboť měření může být zatíženo systematickou chybou přístroje a metody.

$$T = (2,0184 \pm 0,0003) \text{ s}.$$

Určení součinu $\varkappa M_Z$ je poněkud problematické. Předpokládejme, že byl změřen metodou, která nezávisí na setrvačné hmotnosti, a berme

$$\varkappa M_Z = (3,987 \pm 0,005) \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Poměr μ/m určíme ze vztahu (1), jeho chybu určíme z kvadratického zákona přenosu chyb

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R} \Delta R \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial T} \Delta T \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l} \Delta l \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial (\varkappa M_Z)} \Delta (\varkappa M_Z) \right)^2}.$$

Dostáváme poměrně přesný výsledek

$$x = \frac{\mu}{m} = 0,999 \pm 0,004.$$

Diskuse a závěr

Na chybu výsledného poměru μ/m má největší vliv chyba určení délky kyvadla l . Tuto chybu bychom mohli snížit použitím delšího závěsu. Dále se na výsledné chybě projevuje nepřesnost určení součinu $\varkappa M_Z$ a vzdálenosti R . Chyba způsobená tím, že kmity nejsou harmonické, je o řád menší než uvedené chyby, také předpoklad matematického kyvadla je zde poměrně přesný.

Námi určená hodnota poměru gravitační a setrvačné hmotnosti se tedy v rámci své chyby shoduje s očekávanou hodnotou.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz