18. ročník, úloha II . P . . . nečekaná překážka *(5 bodů; průměr 1,63; řešilo 51 studentů)*

Řidič automobilu jedoucí rychlostí v náhle spatří, že jeho vůz směřuje doprostřed betonové zdi šířky 2d ve vzdálenosti l. Součinitel klidového tření mezi pneumatikami a vozovkou je f. Poraďte řidiči, co má dělat, aby se vyhnul srážce se zdí. Rozhodněte, pro jakou velikost rychlosti je to ještě možné. *Napadlo Pavla Augustinského při cestě autem.*

Podobně jako u minulých úloh (např. ošklivé kačátko) šlo v této úloze o nalezení nějaké „optimální" trajektorie. V praxi bychom často rádi znali skutečně optimální řešení, ale mnohdy se spokojíme i s řešením, které je pouze lepší než ostatní. To je základem rozmanitých přibližných metod, se kterými se určitě setkáte coby fyzici či inženýři. Hledání nejlepšího řešení je obecně pracné, musíme si vždy rozvážit, zda nám zlepšení výsledku stojí za vynaloženou námahu.

Takto filozoficky začínám proto, poněvadž nikdo z vás nevyřešil tuto úlohu správně ve smyslu nalezení správné trajektorie a důkazu, že je opravdu správná. Všichni jste se ale pokusili vyzkoušet různé možnosti, a pak z nich vybrat nejvhodnější. Držíce se úvodu, počínali jste si v podstatě správně, i když ne zcela, čemuž odpovídá všeobecně nižší počet bodů. Každopádně si ale ukažme, jak vypadá nejlepší řešení.

Podívejme se nejprve, kterak se může auto pohybovat. Ze zadání víme, že koeficient tření mezi pneumatikami a zemí je roven f. Proto největší přípustné zrychlení/zpomalení získáme z rovnice $ma = mgf$, tj.

$$a = fg\,.$$

Auto může brzdit, zrychlovat či zatáčet libovolně, ovšem nejvýše s tímto zrychlením.

Dále je jasné, že stihne-li auto zabrzdit dřív, než narazí do zdi, může objet libovolnou zeď. To nastane, platí-li $l > vt - at^2/2$, kde čas t odpovídá úplnému zabrzdění, čili $v = at$. Odtud $l > v^2/2a$ znamená pro řidiče jistou záchranu.

Abychom potěšili ty, kteří řešili i pohyb po kružnici, rozebereme jej také. Zřejmě nejmenší poloměr takové kružnice se dostane z maximální velikosti třecí síly, která je zároveň silou dostředivou. Odtud

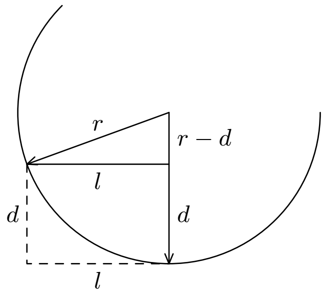
$$\frac{v^2}{r} = fg\,.$$

Největší přípustný poloměr kružnice odpovídá kružnici, která se zdi právě dotkne. Z obrázku a Pythagorovy věty vidíme vztah $r^2 = l^2 + (r - d)^2$, tedy

$$r = \frac{l^2 + d^2}{2d}\,.$$

Po kružnici má smysl jet jen tehdy, když rychlost, odpovídající tomuto poloměru, je větší než maximální rychlost, kdy je auto ještě schopno zabrzdit. Poněvadž poloměr je při stejné rychlosti roven dvojnásobku brzdné dráhy, odpovídá to podmínce $r > 2l$. Tímto získáváme kvadratickou nerovnici

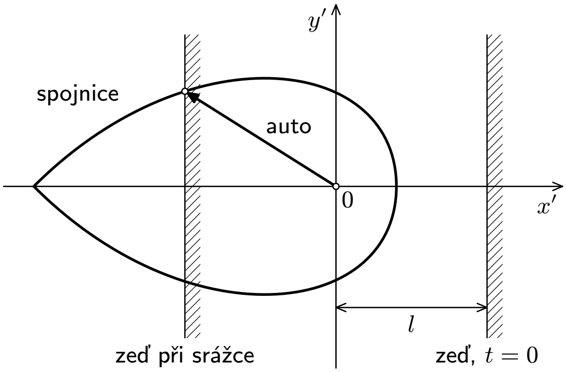
$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 4\,\frac{l}{d} + 1 > 0\,,$$



Obr. 1

která je splněna pro $l/d > 2 + \sqrt{3}$ a $l/d < 2 - \sqrt{3}$. Zde si však musíme uvědomit, že druhé řešení jest irelevantní, což většina z vás, kteří jste se dostali až sem, neudělala. Pak totiž pro šířku zdi platí $d > r$, tedy kružnice kraj zdi protne až na „zpáteční cestě"; předtím už jednou zeď protla.

Nyní prozkoumáme, jaká je nejlepší možná strategie. Použijeme trik motivovaný touto úvahou. V souřadnicové soustavě spojené se zemí se nám pohyb auta komplikuje tím, že v ní má auto určitou počáteční rychlost, přičemž není geometricky jasné, jak přesně k pohybu přispělo zrychlování a jak původní rychlost. Trik spočívá v sledování pohybu ze souřadnicové soustavy, kde je auto na počátku v klidu. V této soustavě je situace jednodušší, například rovnoměrnému zrychlení v jednom směru odpovídá přímka, což je příjemné. Zeď se tam pohybuje rovnoměrně směrem k autu. Nechť se zeď pohybuje doleva, na začátku měla x-ovou souřadnici rovnu l a v čase t bude tato souřadnice rovna $l - vt$. Předpokládejme, že zeď je velmi velká (tedy že určitě nejde objet).



Obr. 2

Zkoumejme pohyby auta s konstantním zrychlením v jednom směru, tj. po přímkách, jak už bylo řečeno. Když se auto po nějaké přímce pohybuje, někde se s tou velkou zdí srazí. V naší rovině si tento bod označme tečkou. Když budeme měnit směr přímky, budeme dostávat různé tečky, jejichž spojením vznikne uzavřená spojitá křivka („kapka“). Spojitost plyne z očekávání, že když malinko změníme směr, posune se příslušný průsečík taky o malinko (bez skoků). Kdybychom přímku otočili o 360°, vrátíme se do původního průsečíku, což představuje uzavřenost křivky tvořené průsečíky.

Úlohu máme vyřešenou, když si uvědomíme, že autíčko nemůže bez srážky se zdí protnout tuto křivku. Kdyby se totiž autíčko pohybovalo jinak než přímo, do příslušného bodu křivky se nutně dostane později, ale v tu dobu tam už byla zeď. Proč později? Přímka odpovídá veškerému úsilí vynaloženému na zrychlování v daném směru. Po obecné křivce se zrychlení vynakládá i do jiných směrů, takže na náš směr zbyde méně. Nyní nám bude zřejmé následující tvrzení. Největší zeď, kterou jde objet, odpovídá maximu průsečíkové křivky.

Shrňme nabyté poznatky: dokázali jsme si, že nejvýhodnější je zrychlovat s konstantním zrychlením v nějakém pevném směru a že tento směr odpovídá maximu té křivky. Nyní zbývá najít jeho polohu. To lze provést standardními metodami (anulováním derivace). Má to ovšem jeden drobný háček, a sice pro polohu maxima obdržíme rovnici 4. stupně, kterou sice jde vyřešit v uzavřeném tvaru (tj. pomocí odmocnin narozdíl od rovnic vyšších stupňů), ale dost složitě. Nicméně existuje i průchodnější postup.

Vrátíme se zpátky na zem, kde zeď stojí a auto brzdí. Teď jsme bohatší o informaci, jak máme jet, ještě však nevíme, kam máme jet. Za tím účelem musíme vysledovat, co v této soustavě představují přímky v předchozí soustavě. Už v prvním ročníku jste se dozvěděli o vrhu šikmém, kde zrychlení má konstantní směr dolů. Trajektorií je parabola se svislou osou. Analogicky v naší situaci bude trajektorií parabola s osou ve směru zrychlení. Když budeme měnit směr, budeme dostávat různé paraboly. Parametrická rovnice takové paraboly je

$$x = vt - \tfrac{1}{2} a \cos\varphi \, t^2 \,,$$
$$y = \tfrac{1}{2} a \sin\varphi \, t^2 \,.$$

Nyní použijeme myšlenku hledání maxim pomocí derivací. Jak víte, extrému odpovídá nulová derivace. To ale znamená, že při malém posunutí od výchozího bodu se hodnota funkce v prvním přiblížení nezmění, neboť tečna grafu, jež jej aproximuje v okolí tohoto bodu, má nulový sklon. Tuto myšlenku použijeme následujícím způsobem. Nechť překážka stojí ve vzdálenosti x. Chceme najít parabolu, která je pro toto x nejvýše, přičemž různé paraboly dostáváme různou volbou úhlu φ – směru zrychlení. Máme-li takovou parabolu, pak při malé změně úhlu φ o $\mathrm{d}\varphi$ se podle úvahy výše výška paraboly v prvním přiblížení nesmí změnit. Můžeme změnu výšky explicitně spočítat a položit ji rovnou nule.

Malá potíž spočívá v tom, že aby zůstalo x pevné, musí se změnit čas. Nechť se úhel změní o $\mathrm{d}\varphi$ a čas, kdy má autíčko souřadnici x, z t na $t + \mathrm{d}t$. Nyní napíšeme rovnici, která vyjadřuje, že se x nezměnilo, tedy rovnici pro x-ovou složku změny paraboly. Platí

$$\mathrm{d}x = v(t + \mathrm{d}t) - \tfrac{1}{2} a(\cos\varphi + \mathrm{d}\cos\varphi)(t + \mathrm{d}t)^2 - vt + \tfrac{1}{2} a \cos\varphi \, t^2 =$$
$$= (v - at\cos\varphi)\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2} a \sin\varphi \, t^2 \,\mathrm{d}\varphi \,,$$

neboť $\mathrm{d}\cos\varphi = -\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$. Požadujeme $\mathrm{d}x = 0$, což nám dává vztah mezi $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}\varphi$

$$\mathrm{d}t = \frac{\tfrac{1}{2} a \sin\varphi \, t^2}{at\cos\varphi - v} \,\mathrm{d}\varphi \,.$$

Napíšeme rovnici pro změnu y, kam posléze dosadíme za $\mathrm{d}t$ z právě získaného vztahu

$$\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} a \left(\sin\varphi + \mathrm{d}\sin\varphi\right)\left(t + \mathrm{d}t\right)^2 - \tfrac{1}{2} a \sin\varphi t^2 = a \sin\varphi \, t \,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2} a \cos\varphi \, t^2 \,\mathrm{d}\varphi \,,$$

neboť $\mathrm{d}\sin\varphi = \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi$. Podmínka maxima je $\mathrm{d}y = 0$, což po dosazení představuje rovnost

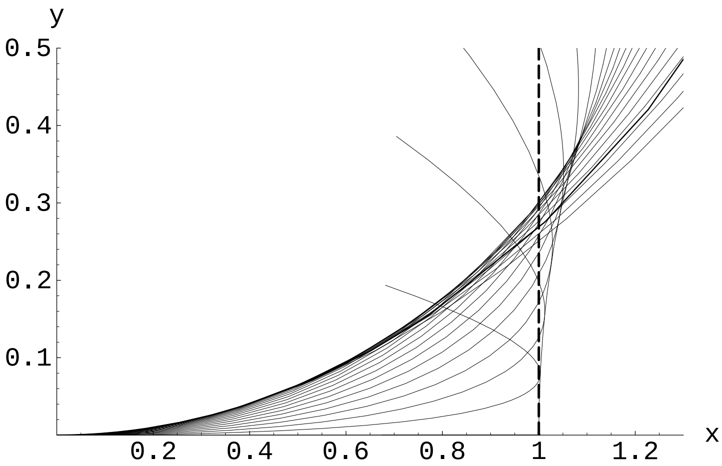
$$v\cos\varphi = at \,.$$

Všimněte si, že tato podmínka je ekvivalentní tvrzení, že nejvyšší bod je roven vrcholu nějaké paraboly, kde je rychlost kolmá na zrychlení.

Získali jsme možnost napsat parametrickou rovnici křivky, která je pro každé x stejně vysoká jako nejvyšší parabola (tzv. obalová křivka). Můžete ji vidět na obrázku 3 (silně vytažená křivka). Parametrickou rovnici této křivky získáme dosazením posledního vztahu do rovnic paraboly

$$x = \frac{v^2}{a} \cos\varphi - \frac{v^2}{2a} \cos^3\varphi \,,$$
$$y = \frac{v^2}{2a} \sin\varphi \cos^2\varphi \,.$$

Označíme-li $v^2/2a$ (což, jak víme, je brzdná dráha) jako p, pak vidíme, že pro danou překážku vše závisí pouze na tomto parametru a nikoliv na rychlosti a zrychlení odděleně.



Obr. 3

Je-li vzdálenost zdi od počátku l, pak, jde-li objet, musí platit $y > d$. Chceme najít maximální možný parametr p, pro který daná zeď jde objet. To odpovídá maximální možné počáteční rychlosti, případně minimálnímu možnému zrychlení. Naše křivka se bude při zvětšování p evidentně „přimačkávat" k ose x. Při takovém pohybu někdy protne okraj zdi, a to odpovídá hledanému maximálnímu p. Zbývá jej najít z rovnice křivky, kde položíme $x = l$ a $y = d$. Podělíme-li rovnice, získáme

$$\frac{d}{l} = \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{2\cos\varphi - \cos^3\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + 2\operatorname{tg}^2\varphi}\,,$$

jak plyne z vyjádření $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$. Ekvivalentně $1/\cos^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi$,

$$2\operatorname{tg}^2\varphi - \frac{l}{d}\operatorname{tg}\varphi + 1 = 0\,.$$

Má-li tato rovnice kladné řešení, jde zeď ještě objet. Bude tomu tak zřejmě pro

$$D = \frac{l^2}{d^2} - 8 \geq 0\,,$$

alespoň jeden kořen pak musí vyjít větší něž nula, neboť u $\operatorname{tg}\varphi$ stojí záporné číslo. Přicházíme k závěru, že danou překážku lze objet, když je poměr její pološířky ku vzdálenosti od autíčka menší než $1/\sqrt{8}$.

Podotýkám, že jsme požadovali $l < p$. Měli bychom tedy ověřit, platí-li právě odvozená podmínka, dostaneme doopravdy $p > l$. Za tím účelem přepíšeme rovnici pro l ve tvaru

$$\frac{l}{p} = \frac{l}{d}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}}\,.$$

Levá, a tedy i pravá strana má být menší než 1. Dosadíme za $\operatorname{tg}\varphi$ z výše uvedené kvadratické rovnice, kde volíme znaménko + (znaménko − odpovídá protnutí sestupné části obalové křivky a nás nezajímá) a analyzujeme pravou stranu. Takto bychom, nejspíše numericky, zjistili, že musí platit $l/d > 2{,}844$, zatímco naše původní kritérium říká $l/d > \sqrt{8} \approx 2{,}828$.

Shrňme vše, co jsme vydedukovali. Nechť máme nějakou překážku v nějaké vzdálenosti. Objet ji, aniž bychom museli být schopni zastavit, lze pouze, pokud je splněna výše uvedená podmínka, respektive její zpřesněná varianta. Pak můžeme dopočítat maximální možný parametr p, tedy maximální možnou vstupní rychlost pro dané zrychlení anebo minimální potřebné zrychlení pro danou rychlost. V opačném případě se jednoznačně vyplatí jet přímo ke zdi a brzdit. Následky srážky totiž určuje hybnost ve směru kolmém na zeď, a tu v okamžiku srážky učiníme nejmenší, budeme-li v tomto směru brzdit.

Zde je již možné přestat s řešením. Splnili jsme to, co jsme si na začátku předsevzali; nemáme sice přesný vzoreček, který by nám pro danou překážku umožnil rozhodnout, jde-li objet, ale máme dobrý odhad a jsme případně schopni numericky ověřit, jestli se nemýlíme.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.