18. ročník, úloha I . 4 ... *vodník Děsílko poznává svět* *(4 body; průměr 1,67; řešilo 69 studentů)*

Vodník sedí na dně v čisté klidné vodě svého rybníka a dívá se vzhůru, jeho oči jsou v hloubce $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ pod povrchem vody. Jak se Děsílkovi jeví prostor nad hladinou? Předpokládejte, že index lomu oka je stejný jako index lomu vody.

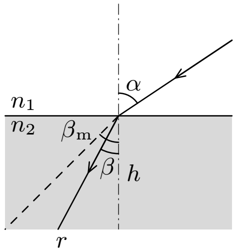
Úloha ze sbírky prof. Vybírala.

Vodník Děsílko uvidí svět podstatně jinak, než kdyby se díval z hladiny. Je to způsobeno lomem světla, ke kterému dochází na rozhraní vzduch-voda. Pro paprsek procházející rozhraním platí Snellův zákon lomu

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta\,. \tag{1}$$

V tomto případě $n_1 < n_2$, proto se bude paprsek lomit ke kolmici. Z této nerovnosti a Snellova zákona je zřejmé, že existuje určitý kritický úhel β_m, pod kterým se lomí paprsky dopadající na hladinu pod úhlem $\alpha = 90^\circ$. Pokud $\beta > \beta_\mathrm{m}$, nastává totální odraz (může se chápat i tak, že paprsky už by se neměly kam lomit, a proto se všechny odrazí). V našem případě $n_1 \doteq 1$ a $n_2 \doteq 1{,}33$, proto

$$\sin\beta_\mathrm{m} = \frac{1}{1{,}33}\sin 90^\circ \quad\Rightarrow\quad \beta_\mathrm{m} \doteq 49^\circ.$$



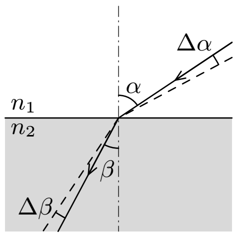
Obr. 1

Pokud se Děsílko bude dívat pod menším úhlem než $90^\circ - \beta_\mathrm{m}$ (měřeno od horizontu), uvidí odraz dna od hladiny, pod větším úhlem uvidí nad hladinu. Svět nad hladinou se mu bude jevit v kruhovém okně o poloměru

$$r = h\,\mathrm{tg}\,\beta_\mathrm{m} \quad\Rightarrow\quad r \doteq 1{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Nyní se zamysleme nad tím, jak deformovaný se mu bude jevit svět nad hladinou. Rozumnější a hlavně elegantnější je řešit to pomocí úhlů než pomocí vzdáleností. Člověk (i vodník) totiž vnímá věci v prostředí pomocí úhlů a pak až podle zkušenosti vyhodnotí, jak je daná věc veliká, případně jak je daleko.

Kdyby byl Děsílko na hladině, viděl by předmět ve směru úhlu α pod úhlem $\Delta\alpha$ (můžeme ho nazvat úhlovou velikostí). Pod hladinou jej uvidí ve směru úhlu β pod úhlem $\Delta\beta$. Zjevně platí vztah



Obr. 2

$$n_1 \sin(\alpha + \Delta\alpha) = n_2 \sin(\beta + \Delta\beta)\,,$$

$$n_1 (\sin\alpha\cos\Delta\alpha + \cos\alpha\sin\Delta\alpha) = n_2 (\sin\beta\cos\Delta\beta + \cos\beta\sin\Delta\beta)\ .$$

Pro malé úhly $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ platí přibližně $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$ a $\cos\Delta\alpha = 1$, dostáváme tedy

$$n_1 (\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha) = n_2 (\sin\beta + \Delta\beta\cos\beta)\ .$$

Pomocí (1) a vztahu

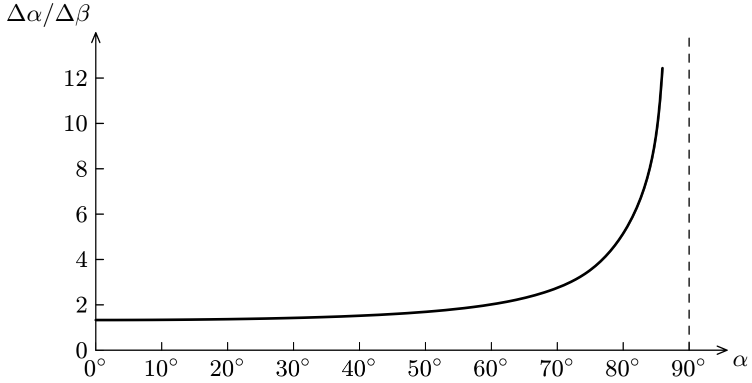
$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2\alpha}$$

můžeme rovnici upravit na tvar

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}}\,.$$

Výraz na levé straně je poměr mezi úhly $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ a zjevně má význam relativní vertikální změny úhlové velikosti předmětu při přechodu z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2 v závislosti na úhlu, pod kterým bychom jej pozorovali bez optického rozhraní. Z výrazu na pravé straně lze vyčíst nejen vlastní zvětšení, ale při hlubším rozboru z něj lze vyčíst i vlastnosti kritického úhlu a vůbec charakteristiku celého lomu.

V našem případě bude docházet ke zmenšení, což se dalo určit i z obrázku. Pro α jdoucí k 90° poroste zmenšení nade všechny meze. Není bez zajímavosti prozkoumat, jak se tato funkce na intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ chová (viz obr. 3).



Obr. 3

K výsledku, že Děsílko uvidí nad hladinu pouze kruhovým otvorem, dospělo hodně řešitelů. Většina se ale pak spokojila s konstatováním, že obraz světa bude zdeformovaný a zmenšený. Jen málo se pokusilo o rozumnou analýzu této deformace, ať už graficky nebo početně.

Vojta Krejčiřík
vojta@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.