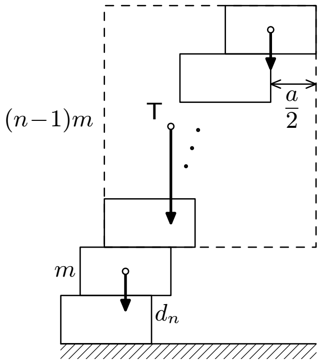
18. ročník, úloha I . 3 ... *mistr zedník* *(4 body; průměr 2,33; řešilo 75 studentů)*

Zedník staví cihly na sebe do výšky jako schody. Snaží se je postavit co nejvíce do dálky a ví, že jich může použít, kolik chce. Poraďte mu, jak to má provést, aby se „dostal“ co možná nejdále, i když nesmí používat maltu.

Na úlohu si vzpomněl Jarda Trnka, když doma stavěl příčku.

Aby soustava cihel nespadla, musí platit, že část soustavy nad libovolnou cihlou musí mít těžiště nad podstavou této cihly. Chceme-li se dostat s cihlami co nejdále, jsme nuceni toto těžiště umístit právě nad boční hranu (ve směru stavění) této cihly.

Vzhledem k výše uvedeným úvahám bude nejvhodnější určovat polohy cihel seshora dolů. Máme-li dvojici cihel, budou předcházející úvahy naplněny v případě, že horní cihla bude přečnívat právě o $a/2$, je-li a délka hrany podstavy (viz obrázek 1). Nyní uvažme situaci pro $(n+1)$-ní cihlu shora. Část soustavy nad touto cihlou můžeme rozdělit na cihlu bezprostředně nad ní (tedy n-tou shora) a na zbylou část obsahující $n-1$ cihel. Podle výše zmíněné úvahy jsme soustavu nad n-tou cihlou umístili tak, že její těžiště je nad boční hranou n-té cihly a její hmotnost je $m(n-1)$, kde m je hmotnost jedné cihly. Označme d_n délku, o jakou přečnívá n-tá cihla přes $(n+1)$-ní. Má-li být těžiště prvních n cihel nad boční hranou $(n+1)$-ní cihly, platí



Obr. 1

$$\frac{1}{nm}\left[-m\left(\frac{a}{2}-d_n\right)+m\,(n-1)\,d_n\right]=0 \quad\Rightarrow\quad d_n=\frac{a}{2n}\,.$$

Budeme-li takto stavět cihly na sebe, dostaneme se do vzdálenosti rovné součtu všech posunutí d_i

$$d=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{6}+\cdots+\frac{a}{2n}+\cdots=\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right).$$

Součet řady v závorce je nekonečně veliký. To lze nahlédnout tak, že si členy řady vhodně uzávorkujeme

$$d=\frac{a}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\right].$$

Součet členů v závorce odhadneme nejnižším členem skupiny

$$d\geq\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots\right)=\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\right).$$

Protože těchto skupin můžeme vytvořit nekonečně mnoho, sčítáme nekonečně mnohokrát $1/2$, součet řady je nekonečný. Zedník se tedy může dostat do libovolné vzdálenosti.

Milan Pečeňa & Jana Hrudíková
milan@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.