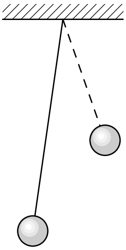
18. ročník, úloha I . 2 ... *přistřižené kyvadlo* *(3 body; průměr 2,43; řešilo 105 studentů)*

Malá hmotná kulička visí na konci nehmotného provázku a kmitá svojí vlastní frekvencí f kolem rovnovážné polohy (viz obr. 1). Jaká bude vlastní frekvence f', pokud zkrátíme provázek na polovinu? *Úloha pochází z MFO v Kanadě, 1997.*

Řešení této úlohy bylo opravdu jednoduché. Malou hmotnou kuličku na nehmotném závěsu lze v dobrém přiblížení považovat za matematické kyvadlo (poloměr kuličky je malý v porovnání s délkou závěsu, závěs je nehmotný, výchylka je do 5°). Stačilo tedy použít vztah pro frekvenci matematického kyvadla



Obr. 1

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \,. \tag{1}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu délku zkráceného kyvadla, získáme

$$f' = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l/2}} \,.$$

Rovnice podělíme

$$\frac{f'}{f} = \frac{1/2\pi \cdot \sqrt{2g/l}}{1/2\pi \cdot \sqrt{g/l}} \quad \Rightarrow \quad f' = f\sqrt{2} \,,$$

čímž získáme hledaný vztah mezi původní a novou frekvencí.

Chceme-li si odvodit (1), rozebereme síly působící na kuličku. Tíhovou sílu rozložíme do směru tečného ke směru pohybu a do směru kolmého na směr pohybu. Normálová složka tíhové síly je kompenzována silou závěsu, takže výslednice sil má nenulovou složku pouze ve směru pohybu kuličky. Druhá impulzová věta říká

$$J\ddot{\varphi} = M \,,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vzhledem k závěsu ($J = ml^2$) a M je velikost momentu sil působícího na kuličku

$$M = mgl \sin\varphi \,.$$

Dosazením do rovnice druhé impulzové věty získáme (moment dosazujeme se záporným znaménkem, protože působí proti směru pohybu)

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi \,,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0 \,. \tag{2}$$

Tato rovnice nejde analyticky vyřešit. Uvažujeme-li výchylku malou, je

$$\sin\varphi \doteq \varphi$$

a rovnice (2) získá mnohem jednodušší tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \,. \tag{3}$$

Toto je *rovnice harmonických kmitů*, jejímž řešením je

$$\varphi = A\cos(\omega t + \alpha_0)\,,$$

kde A je amplituda, α_0 je počáteční fáze a ω úhlová frekvence harmonických kmitů. Abychom zjistili hodnotu ω, dosadíme φ z této rovnice do (3)

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \alpha_0) + \frac{g}{l}A\cos(\omega t + \alpha_0) = 0\,.$$

Má-li tato rovnice platit pro všechna t, okamžitě dostáváme

$$A\omega^2 = A\,\frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Pro frekvenci platí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

dostali jsme tedy výsledek (1).

Většina řešitelů měla tuto úlohu správně, nejčastější chybou byla záměna vzorců pro frekvenci a periodu. Řešitelům pak vyšla převrácená hodnota $f'/f = 1/\sqrt{2}$, což je nesmysl. Několik z vás také přistoupilo k řešení úlohy experimentálně, to ale nebylo naším záměrem.

Petra Suková & Martin Rybář
pet@fykos.mff.cuni.cz, martin@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.