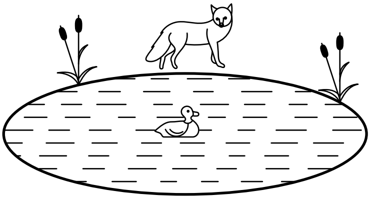
18. ročník, úloha I . 1 ... *ošklivé kačátko* *(4 body; průměr 1,30; řešilo 99 studentů)*

Opuštěné ošklivé kačátko zůstalo osamocené uprostřed kruhového rybníku. Chce se dostat za svými sourozenci a matkou kachnou, ale na břehu rybníka na něj číhá liška. Kačátko je ještě mladé, proto dokáže vzlétnout pouze z pevné země. Určete maximální poměr rychlostí běhu lišky a plavání kačátka, aby stihlo doplavat na břeh a z něj lišce uletět. Poraďte také kačátku, jakou strategii má zvolit. *Úlohu znala Lenka Zdeborová.*

Mějme kačátko, nechť jeho rychlost je 1 a rychlost lišky v (bude pak rovna přímo hledanému poměru). Není obtížné nahlédnout, že je-li kačátko dostatečně blízko středu rybníku, může dosáhnout stejné či větší úhlové rychlosti rotace kolem středu než liška obíhající po břehu. Skutečně, je-li kachnička ve vhodné vzdálenosti r a liška ve vzdálenosti R od středu, úhlová rychlost kačátka je



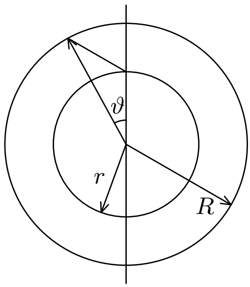
Obr. 1. Kačátko v rybníku

$$\omega_K = \frac{v_K}{r} = \frac{1}{r} > \frac{v}{R} = \frac{v_L}{R} = \omega_L\,.$$

Nerovnost platí pro $r/R < 1/v$. Odtud již přímo plyne, že se kačátko může dostat do situace, kdy je ve vzdálenosti $r = R/v$ od středu a liška se nachází na přesně opačné straně rybníku, tj. spojnice liška–oběť prochází středem kružnice. Velká část řešitelů se probojovala až sem.

Ovšem ihned vyvstává otázka: „Co dál?“ Nejjednodušší odpověď může znít: „Kačátko by mělo plavat po co nejkratší cestě ke břehu.“ Přinejmenším bude na břehu za nejkratší čas. Nicméně toto je jen jedna strana mince! Druhá říká: „Podívej se na lišku.“ Ona totiž nezahálí, nýbrž usilovně sprintuje směrem k očekávanému přístavišti zvířátka. Měli bychom tedy alespoň popřemýšlet, zda by nebylo lepší, aby kachnička plavala poněkud od lišky.

Mimochodem, největší část řešitelů tvrdila, že má kachnička plavat ze středu přímo rovně k okraji. Zde je vidět, že se mýlí, neboť je-li kachnička na obvodu našeho pomyslného kruhu, je blíže okraji než předtím a liška je stejně jako předtím na opačné straně kruhu.



Obr. 2

Vraťme se k pohybu lišky. Ta vidí kačátko na opačné straně a nyní se musí rozhodnout, kam poběží. Samozřejmě se nezastaví, to by kačátku poskytla náskok. Liška se může rozběhnout, kam chce (ze symetrie). Nyní určíme, jak se zachová kačátko.

Pochopitelně, poplave více méně na druhou stranu než liška (otáčí se ve stejném smyslu). Poplave po přímce, neboť kdyby plavalo po křivce z bodu A do B, mohlo by plavat přímo z A do B, čímž by ušetřilo čas. Budeme předpokládat, že liška jednou se rozběhnuvší se již neotočí, což zdůvodníme později.

Z obrázku 2 určíme dráhu lišky $R(\pi + \vartheta)$ a dráhu kačátka $\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}$. V mezním případě se budou rovnat doby, za které liška a kačátko tyto dráhy urazily. To nám poskytne závislost v na ϑ. Nám zbývá najít maximum této funkce. Při úpravě využijeme vztah uvedený výše ($R/r = v$).

$$\begin{aligned} R(\pi + \vartheta) &= v\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}\,,\\ \pi + \vartheta &= v\sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R)\cos\vartheta}\,,\\ \pi + \vartheta &= \sqrt{1 + v^2 - 2v\cos\vartheta}\,,\\ 0 &= v^2 - 2v\cos\vartheta + 1 - (\pi + \vartheta)^2. \end{aligned}$$

Odtud určíme

$$v = \cos\vartheta + \sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2\vartheta}\,, \tag{1}$$

přičemž znaménko + použijeme, aby bylo v kladné. Zbývá určit polohu maxima, tj. vztah derivovat podle ϑ a položit derivaci rovnu nule

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin\vartheta + \frac{\pi + \vartheta - \sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}{\sqrt{(\pi+\vartheta)^2 - \sin^2\vartheta}} = 0\,.$$

Po několika přímočarých úpravách se radostně dobereme stavu

$$1 - 2\,\frac{\pi + \vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta} + \left(\frac{\pi+\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta}\right)^2 = 0\,,$$

odkud přímo plyne

$$\operatorname{tg}\vartheta = \pi + \vartheta\,. \tag{2}$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky.

Tímto postesknutím práce fyzika nesmí skončit! Samozřejmě neočekáváme, že by student střední školy měl v malíčku numerické metody. Ale každý má počítač, který takové věci umí provádět. Stačí najít vhodný software (např. Excel), jenž řeší rovnice či kreslí grafy. A dokonce i když člověk s počítačem nekamarádí, nemusí se vzdát, má-li chytrou hlavu. Co třeba následující úvaha. Když se mi podaří najít ϑ tak, že $\operatorname{tg}\vartheta < \pi + \vartheta$ a vzápětí jiné ϑ, ovšem splňující $\operatorname{tg}\vartheta > \pi + \vartheta$, zjistil jsem, v kterém intervalu leží správné ϑ, splňující rovnici (2). Je-li tento interval příliš široký, provedu hledání znovu, ϑ budu ale vybírat z tohoto nového intervalu. Intervaly zužuji tak dlouho, dokud nejsou dostatečně úzké. Je to sice poněkud pracné, ale najdu alespoň přibližnou hodnotu ϑ.

Prakticky je nejlépe rovnici upravit na tvar $\operatorname{tg}\vartheta - \pi - \vartheta = 0$ a sledovat znaménko nové levé strany. Vyberu na začátku interval, pro který platí, že vlevo je levá strana záporná a vpravo kladná (nebo naopak). Pak se podívám na hodnotu levé strany uprostřed intervalu. Je-li kladná, vezmu za nový interval levou polovinu, je-li záporná, vezmu pravou polovinu, a postup opakuji tak dlouho, dokud není interval pro mé účely dostatečně úzký. V každém kroku se zmenší na polovinu, tj. konvergence je rychlá.

Touto metodou se dá získat odhad

$$\vartheta \approx 1{,}352 \quad\Rightarrow\quad v \approx 4{,}601\,,$$

který je správným řešením úlohy.

Bylo by dobré se ještě podívat, co to znamená geometricky. Dokážeme, že se vlastně jedná o tečnu k malé kružnici! Je-li totiž onen trojúhelník pravoúhlý (tedy jde-li o tečnu), musí pro něj platit Pythagorova věta. Vyjádřeno rovnicí

$$R^2 = r^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{R}{r} = v\,.$$

Nicméně dosadíme-li do našeho výrazu (1) pro v podmínku nulové derivace (2), zjistíme totéž

$$v = \cos\vartheta + \sqrt{(\pi+\vartheta)^2 - \sin^2\vartheta} = \cos\vartheta + \sqrt{\operatorname{tg}^2\vartheta - \sin^2\vartheta} = \cos\vartheta + \sin\vartheta\cdot\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\cos\vartheta}\,.$$

Tedy trojúhelník je pravoúhlý.

Zbývá nám malý restík, totiž diskutovat, co se stane, otočí-li se liška. Liška se nejdřív musí vrátit do své původní pozice. Když je vpravo od ní a kačátko plavalo po tečně, přímka střed–liška leží vlevo od kačátka. Bude-li se liška vracet, pak kačátko tuto přímku protne. Máme situaci jako na začátku, jenže kačátko je nyní dále od středu než předtím. Čili liška si uškodila.

Podle počtu správných řešení se dá usoudit, že pro většinu řešitelů čtení tohoto textu nebyla úplná ztráta času.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.