17. ročník, úloha VI . E ... *do dna* *(8 bodů; průměr 5,36; řešilo 14 studentů)*

Do dna vědra zhotovte malý kruhový otvor a vědro naplňte vodou. Změřte, jak závisí doba výtoku vody na počáteční výšce hladiny. Naměřené hodnoty porovnejte s teorií.

Na schůzce FYKOSu vymyslel Miro.

Do poslední série jsem si pro vás připravili jednoduchou experimentální úlohu. Klíčové na ní bylo srovnání teorie a experimentálních výsledků, proto začněme teorií.

Teorie

Důležité je uvědomit si, jak budeme experiment realizovat, a podle toho formulovat teorii. My jsme použili válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Protože voda bude z nádoby vytékat pomalu a rychlost vytékaní se bude také měnit pomalu, můžeme děj považovat za přibližně ustálené. Takže použijeme Bernoulliho rovnici,

$$p + h\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{konst.}$$

Tlak kapaliny je nahoře v nádobě a u výtoku stejný (je roven atmosférickému). Pokud označíme v_R rychlost poklesu hladiny a v výtokovou rychlost z otvoru, pak dostáváme

$$v^2 = v_R^2 + 2hg.$$

Potřebujeme získat vztah pro v_R v závislosti na výšce hladiny. Využijeme rovnici kontinuity

$$\pi r^2 v = \pi R^2 v_R^2$$

a dostáváme

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v_R = \sqrt{\frac{2hg}{\frac{R^4}{r^4} - 1}}.$$

Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných. Označíme-li H jako počáteční výšku hladiny a t čas, za který voda vytekla, potom integrujeme

$$\int_H^0 \frac{\mathrm{d}h}{h} = -\sqrt{\frac{2g}{\frac{R^4}{r^4} - 1}} \cdot \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Pro dobu výtoku dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{1}$$

Na závěr teoretického úvodu se zamysleme nad možnými odchylkami teorie od skutečnosti. Předpokládali jsme proudění ustálené, které je ve skutečnosti nestacionární. Proto bude teorie dávat menší časy výtoku, než jsou ve skutečnosti. Ve výpočtu jsme také zanedbali viskozitu vody, která se projevuje tak, že rychlost vody není v celém průřezu otvoru stejná, efektivně tedy snižuje poloměr r. Dále má vliv tvar nádoby, v našem případě je „dokonale zúžená“, neboť v rovném dnu máme malý otvor. To má za následek, že elementy vody narážejí do dna a mění směr své hybnosti, tím se tedy také snižuje rychlost výtoku vodu. Experiment by měl proto dávat delší časy výtoku, než předpovídá teorie.

Postup měření

K úspěšnému provedení experimentu je potřeba mít válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Proto není moc vhodné používat kbelík, protože ten nemá konstantní průřez. Vyrobíme si vlastní nádobu například z plastu tak, že k plastové rouře o vnitřním poloměru R přilepíme (například pomocí tavné pistole) rovné dno s dírkou o poloměru r. Celou aparaturu pevně upevníme a plníme ji vodou do různých výšek. Při odměřování času, za který se nádoba vyprázdní, nečekáme do okamžiku, kdy je nádoba zcela prázdná. Lepší je postupovat tak, že si na nádobě uděláme rysku „nulové výšky“ a měříme čas, než hladina klesne na tuto rysku. Přesný okamžik vyprázdnění nádoby nelze totiž určit. Dobu výtoku budeme proměřovat pro dvanáct různých výšek, pro každou výšku provedeme tři měření. Abychom zajistili během všech těchto tří měření stejnou počáteční výšku hladiny, naléváme do nádoby vždy stejný odměřený objem vody.

Čas měříme na stopkách, výšku hladiny a průměr nádoby svinovacím metrem a průměr otvoru posuvným měřítkem.

Výsledky měření

Po zhotovení aparatury jsme změřili průměr nádoby a otvoru

$$2R = (124 \pm 2)\,\mathrm{mm}, \quad 2r = (8{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}.$$

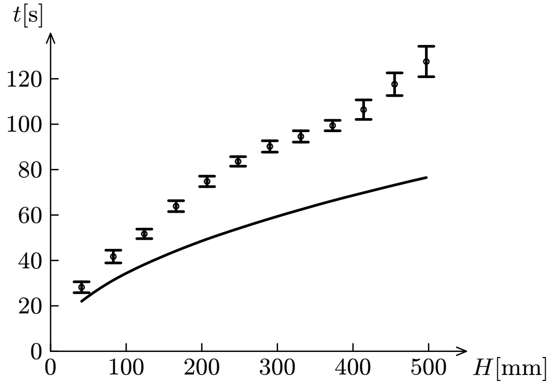
Doby výtoku pro jednotlivé počáteční výšky hladiny jsou uvedeny v následující tabulce.

H[mm]	t_1[s]	t_2[s]	t_3[s]	t[s]	Δt[s]
41	29,1	27,6	27,9	28,2	2,4
83	41,3	43,0	40,8	41,7	2,8
124	52,1	51,4	51,7	51,7	2,1
166	64,6	63,1	64,0	63,9	2,4
207	74,1	75,4	75,0	74,8	2,3
248	83,2	84,1	83,6	83,6	2,1
290	90,8	90,5	89,2	90,2	2,5
331	95,9	94,3	94,4	94,9	2,5
373	100,2	98,9	99,2	99,4	2,3
414	108,7	106,2	104,3	106,4	4,3
455	120,4	115,2	117,1	117,6	5,0
497	131,6	124,3	127,0	127,6	6,7

V posledním sloupci je uvedena chyba hodnot t. Určíme ji ze vztahu

$$\Delta t = \sqrt{(3s_{\mathrm{sm}})^2 + s_{\mathrm{m}}^2},$$

kde s_{sm} je směrodatná odchylka a s_{m} je chyba měření, kterou v našem případě odhadujeme na 2 s (podle toho jak přesně bylo možné určit okamžik, kdy hladina klesla na námi vyznačenou rysku). Tyto hodnoty t spolu s chybovými úsečkami Δt vyneseme do grafu v závislosti na H (viz obr. 1). Hodnoty H považujeme za přesné, neboť jejich chyba je vzhledem k chybě měření času zanedbatelná.



Obr. 1

Do grafu rovněž zakreslíme teoretickou křivku danou vztahem (1). Její hodnoty jsou ovšem také zatíženy chybou, neboť neznáme přesně r a R. Pro relativní chybu teoretických hodnot platí

$$\delta t_{\mathrm{teor}} = 2\delta r + 2\Delta R = 8\,\%.$$

Diskuse a závěr

Z grafu jasně vidíme, že i když uvážíme chybu teoretických hodnot, tak nám naměřené hodnoty doby výtoku vyjdou větší než teoretické. To potvrzuje naše očekávání, které jsme rozebrali v teoretickém úvodu. Naměřené hodnoty mají i podobný průběh jako teoretická křivka, jenom poslední tři hodnoty uhýbají k větším časům. To je pravděpodobně způsobeno změnou charakteru proudění.

Náš teoretický model tedy neodpovídá skutečnosti. Zmenšováním velikosti otvoru se mu ale můžeme dosti přiblížit. V technické praxi se zavádí rychlostní koeficient, který charakterizuje rychlost výtoku kapaliny z otvoru, a koeficient výtoku, který charakterizuje tvar nádoby. S jejich uvážením by se teoretická křivka a naměřené hodnoty v rámci chyby shodovaly.

Poznámky k došlým řešením

S většinou došlých řešeních jsem byl velice spokojen, relativně hodně řešení bylo ohodnoceno plným počtem bodů. Řešitelé přistoupili k problému dobře a vypořádali se i s teorií. Z důvodu časové tísně jsme si s dovolením vypůjčili naměřené hodnoty *Tomáše Bednárika*, moc mu děkujeme.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.