

17. ročník, úloha VI. 4 ... potopa na Utodu (4 body; průměr 3,00; řešili 4 studenti)

Planeta Utod o hustotě ρ je pokryta mořem z kapaliny hustoty ρ' . Výška hladiny je h , poloměr planety R . Vyšetřete stabilitu planety.

Volné pokračování slezských havířů od Pavla Augustinského.

Před vlastním výpočtem nejprve trochu okomentujme zadání. Celý systém planeta–oceán si z pochopitelných důvodů idealizujeme tak, že planeta je dokonale tuhá se sféricky symetricky rozloženou hmotou. Vnější gravitační projevy takového tělesa se nikterak neliší od dokonale tuhé homogenní koule o stejné hmotnosti, proto budeme homogenitu nadále předpokládat. Kapalina tvořící oceán nechť je taktéž ideální, tj. neviskózní a nestlačitelná. Hustotu (homogenizovanou) planety budeme značit ρ , hustotu kapaliny ρ_0 .

Konfigurace hmoty, kdy je planeta obalena konstantně tlustou vrstvou kapaliny, je zcela jistě rovnovážnou polohou (hladina kapaliny splývá s ekvipotenciálou výsledného gravitačního pole). V tomto řešení se budeme zabývat tím, zda a za jakých podmínek je tato konfigurace stabilní.

Co je myšleno stabilní konfigurací? Analogie toho, co znáte z mechaniky soustav tuhých těles; stabilní konfigurace je taková, u které malé fluktuace nezpůsobí nenávratnou změnu stavu systému.

Nabízí se otázka, zda vůbec může být popsán systém nestabilní. Poměrně snadno to lze nahlédnout, zamyslíme-li se nad dvěma extrémními případy. V tom prvním předpokládáme, že planeta má zanedbatelnou hmotnost a oceán tvoří v porovnání s poloměrem tenkou vrstvu. Není těžké si rozmyslet, že kapalina se v takové situaci vlastní gravitací koncentruje v jednom místě. Ještě lépe je nestabilní chování vidět v případě, kdy je planeta zanedbatelně malá vzhledem k hloubce „oceánu“. Pak můžeme gravitační pole planety zanedbat a představit si ji jen jako kuličku plavající v kapalně planetě. Je-li její hustota nižší než hustota kapaliny, bude dle Archimédova zákona nadnášena k povrchu; rovnovážná poloha ve středu kapalně koule je zjevně labilní.

Předchozí úvaha napovídá, že nestabilita nějak souvisí s poměrem hustot planety a kapaliny a nabízí se hypotéza, že oceán je nestabilní, právě když je jeho hustota vyšší než střední hustota planety. Ověříme to tedy výpočtem.

Využijeme toho, že ve stabilní rovnovážné poloze vede libovolná malá změna konfigurace ke zvýšení celkové energie (a naopak, lze-li nějakou spojitou změnou celkovou energii snížit, nejedná se o stabilní polohu). Změna, která nás bude zajímat, bude vychýlení planety ze středu kapalně koule při zachování kulového tvaru kapaliny. Výslednou změnu energie snadno popíšeme, představíme-li si planetu jako těleso o hustotě $\rho - \rho_0$, které prolíná kapalinou a nijak s ní neinteraguje¹ (kapalinu i těleso si lze představit např. jako náhodně rozmístěné hmotné body).

Pole kapalně koule lze snadno popsat, výpočtem lze ověřit, že intenzita závisí přímo úměrně na vzdálenosti od centra. Nyní je již jasné, že znaménko změny energie při vychýlení planety ze středu kapalně koule závisí jen na znaménku $\rho - \rho_0$ konfigurace s planetou ve středu je stabilní, právě když je hustota planety větší než hustota kapaliny.

Jak vypadá stabilní konfigurace v opačném případě není těžké si představit. Planeta „plave“ na hladině kapalněho tělesa, ovšem tvar tohoto tělesa i jejich vzájemná poloha závisí na poměru

¹ Na čtenáři necháváme ověření, že taková abstrakce je legitimní. Rozmyslete si zejména, jak to souvisí s Archimédovým zákonem.

hustot a hmotností a pravděpodobně je nelze analyticky vyjádřit

Honza Houštěk

honza@fykos.mff.cuni.cz