

17. ročník, úloha VI. 3 ... padající komín (5 bodů; průměr 1,33; řešilo 6 studentů)

Silný vítr dul do stěn komínu. Přitom vychýlil komín ze svislé polohy. Komín začal padat a v určitém místě se rozlomil. Pokuste se určit, kde ke zlomu došlo.

Životní zkušenost Jardy Trnky, kdysi jim spadl komín.

Aproximujeme si komín tenkou tyčkou, aby bylo možné úlohu rozumně vyřešit. Označme L délku komínu a m jeho hmotnost. Pokud komín vychýlíme z rovnovážné polohy, začne padat. Úhlové zrychlení ε v závislosti na úhlu φ , který svírá komín s vodorovnou podložkou, vypočteme z 2. impulzové věty $M = J\varepsilon$, kde $M = Fr = mg \cos \varphi L/2$. Pro moment setrvačnosti vůči bodu otáčení platí $J = mL^2/3$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{3}mL^2\varepsilon = \frac{mgL \cos \varphi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g \cos \varphi}{2L}.$$

Označme x vzdálenost nějakého bodu od vrcholu komína. Tento bod si můžeme představit jako střed otáčení té části komína, která je nad ním. Potom z druhé impulzové věty dostaneme $M_1 = J_1\varepsilon_1$. Pro moment síly M_1 bude platit

$$M_1 = F_1r_1 = m_1g \cos \varphi \frac{x}{2} = \frac{mgx^2 \cos \varphi}{2L},$$

kde $m_1 = mx/L$ je hmotnost té části komína nad bodem x . Moment setrvačnosti bude analogicky

$$J_1 = \frac{1}{3}m_1x^2 = \frac{mx^3}{3L}.$$

Po dosazení dostaneme pro zrychlení ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1}{J_1} = \frac{3g \cos \varphi}{2x}.$$

Tímto zrychlením by se část komína od bodu x nahoru měla otáčet, ale nemůže, protože jí v tom brání pevnost materiálu.

Co to tedy znamená? V bodě x působí moment síly $M_1 = J_1\varepsilon_1$, ale na otáčení se uplatní pouze moment $M_2 = J_1\varepsilon$ (z druhé impulzové věty – komín se celý otáčí s úhlovým zrychlením ε). Rozdíl těchto momentů je

$$M' = M_1 - M_2 = J_1(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(x^2 - \frac{x^3}{L} \right).$$

To je tedy moment, který se v bodě x ztrácí do deformací komína. No a kde jinde by měl komín rupnout než v bodě, kde bude tento moment největší. Pro bod maxima funkce $M' = M'(x)$ platí

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(2x - \frac{3x^2}{L} \right) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Dostáváme dvě řešení: $x = 0$, což je minimum, a $x = 2L/3$, což je hledané maximum. Vzdálenost bodu zlomu od paty komína je potom $L/3$.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.